

《离散数学》

9-图的基本概念 (Basic concepts of graph)

杨启哲

上海师范大学信机学院计算机系

2023年11月23日

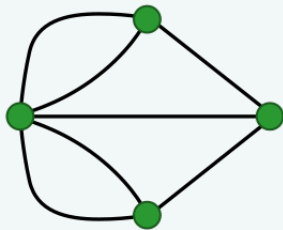
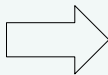
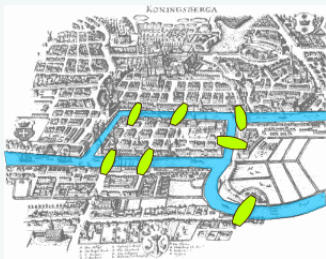
- › 图的基本概念
- › 图的基本性质
- › 图的代数表示

图的基本概念

一般认为，欧拉于 1736 年出版的关于哥尼斯堡七桥问题的论文是图论领域的第一篇文章。

哥尼斯堡七桥问题 (Königsberg Bridge Problem)

在 18 世纪，东普鲁士柯尼斯堡（今日俄罗斯加里宁格勒）市区跨普列戈利亚河两岸，河中心有两个小岛。小岛与河的两岸有七条桥连接。在所有桥都只能走一遍的前提下，如何才能把这个地方所有的桥都走遍？



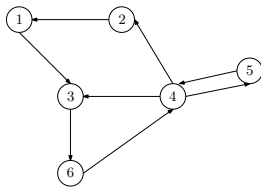
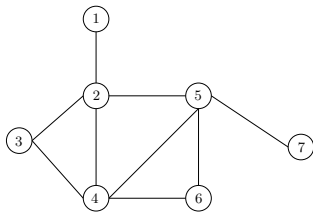
定义 1

[图].

一个图由一个顶点集合 V 和边集合 E 组成, 记作 $G = (V, E)$, 其中 $E \subseteq V \times V$ 是一个多重子集, 也就是说允许有重复的元素出现。

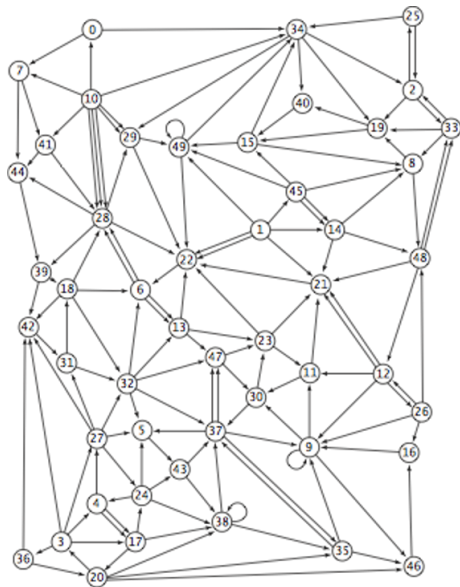
图的种类

- **无向图**: 任何一条边都是无向的, 即 $(u, v) \in E$ 和 $(v, u) \in E$ 等价。特别的, 此时我们将其看成一个元素。
- **有向图**: 边存在方向, 即 $(u, v) \in E$ 表示一条从 u 到 v 的边。



利用 BFS 爬取

- 用某个网页作为根节点
- 维护一个需要访问的队列
- 维护一个已经访问过网页的集合
- 弹出下一个待访问的网页并将其里面未访问的链接全部扔进队列里。



给定一个图 $G = (V, E)$, V 是顶点集合, E 是边集合。

- 顶点数 $|V|$ 成为图的阶 (order)。
- 令 $e = (v_i, v_j)$ 表示 G 中的一条边, v_i 和 v_j 称为 e 的端点, 并称 e 与 v_i, v_j 相关联。
 - 如果 G 是有向图, 则进一步称 v_i 为 e 的始点, v_j 为 e 的终点。
 - 如果 $v_i = v_j$, 则称其为一个自环 (自圈)。
- 如果两个有序顶点对之间存在多条边, 即存在多个 $(u, v) \in E$, 则称这些边是平行边, 其数目称为图的重数。如果不存在平行边也不包含自环, 则称这样的图为简单图。
- 如果 G 是一个有向图, 将其所有边改为无向边, 得到的图称为 G 的基图。

图顶点个数和边个数的记号

我们会用 $|V|, |E|$ 来表示图的顶点个数和边个数; 在没有特别说明的情况下, 我们也会使用 n, m 来表示图的顶点个数和边个数, 即 $n = |V|, m = |E|$ 。

定义 2

[节点的度数].

给定图 $G = (V, E)$

- 若 G 是无向图, 则称将边 v 作为端点的边的数目为 v 的**度数 (degree)**, 记作 $d(v)$, 特别的如果 v 上有个自环, 则该边对于度数的贡献为 2.
- 若 G 是有向图, 则称将边 v 作为始点的边的数目为 v 的**出度 (out-degree)**, 记作 $d^+(v)$; 将边 v 作为终点的边的数目为 v 的**入度 (in-degree)**, 记作 $d^-(v)$, v 的度数 $d(v)$ 则是出度与入度之和, 即 $d(v) = d^+(v) + d^-(v)$.

没有边与 v 相关联的顶点称为**孤立点**, 其度数为 0.

一些其他记号

对于无向图 G , 我们用 $\Delta(G)$, $\delta(G)$ 分别表示 G 中最大和最小的度数, 即:

$$\Delta(G) = \max_{v \in V} d(v), \quad \delta(G) = \min_{v \in V} d(v)$$

有向图中我们也用 $\Delta^+(G)$, $\delta^+(G)$, $\Delta^-(G)$, $\delta^-(G)$ 分别表示最大和最小的出度和入度。

1. **零图**: 不含任何边的图, n 个顶点的空图记为 N_n 。
2. **空图**: 不含任何点和任何边的图, 记作 \emptyset 。
3. **完全图**: 每对顶点之间都有边的无向图, n 个顶点的完全图记为 K_n 。
4. **竞赛图**: 基图为完全图的有向图。
5. **正则图**: 每个顶点的度数都相同的无向图, 特别的, 如果度数为 k , 则称其为 k -正则图。

接下来我们来介绍图论的基本定理。

定理 3

[握手定理].

设 $G = (V, E)$ 是一个无向图，所有顶点度数之和等于边数的两倍，即：

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$$

证明. 对于每条边 $e = (u, v)$ ，计算度数时 u 和 v 的度数都会 $+1$ ，因此每条边会贡献 2 的度数，所以总和为 $2|E|$ 。□

推论 4.

任何一个无向图中度数为奇数的顶点的数目一定是偶数。

同样的，有向图中也可以得到类似的结论：

定理 5

[有向图的握手定理].

设 $G = (V, E)$ 是一个有向图，所有顶点的出度之和等于所有顶点的入度之和，即：

$$\sum_{v \in V} d^+(v) = \sum_{v \in V} d^-(v) = |E|$$

从而上述推论在有向图中也成立，即

推论 6.

任何一个图中度数为奇数的顶点的数目一定是偶数。

现在考虑一个 n 阶无向图 $G = (V, E)$, 记 $V = \{v_1, \dots, v_n\}$, 称 $(d(v_1), \dots, d(v_n))$ 为其的一个**度数列**:

- 显然, 对于任意的无向图 G , 我们可以产生一个非负整数组成的度数列。
- 给定一个非负整数的度数列, 是否可以构造相应的无向图?

定理 7.

给定一个非负整数的度数列 $d = (d_1, \dots, d_n)$, 则存在一个无向图 G , 其度数列为 (d_1, \dots, d_n) 当且仅当:

$$\sum_{i=1}^n d_i \equiv 0 \pmod{2}$$

特别的如果存在相应的无向图, 我们称 d 是**可图化的**, 如果产生的图是简单图, 则称 d 是**可简单图化的**。

可图化的充要条件证明. 必要性由握手定理直接可得。因此我们只需要证明充分性。由 $\sum_{i=1}^n d_i \equiv 0 \pmod{2}$ 可知度数为奇数的顶点的数目一定是偶数，不妨假设为 d_1, \dots, d_{2k} ，现在我们构造一个图 $G = (V, E)$:

- $V = \{v_1, \dots, v_n\}$
- 对于前 $2k$ 个顶点，我们先添加一条 (v_{2i}, v_{2i+1}) 的边。
- 对于 V 中的每个顶点 v_i ，我们添加 $\lceil \frac{d_i}{2} \rceil$ 个自环。

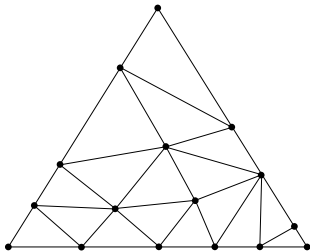
可以验证，这样构造的图的度数列为 (d_1, \dots, d_n) 。 □

定理 8

令 G 是一个简单无向图，则 $\Delta(G) \leq n - 1$ 。

[可简单图化的必要条件].

我们来考虑这样一个问题：给定一个大的三角形，我们将其进行三角化，这里三角化是指将其分成若干个小三角形，使得每个小三角形的边要么落在大三角形边上，要么是其他小三角形的边，如下图所示：



现在考虑对其顶点染色，满足下列条件：

- 大三角形的三个顶点染成不同的颜色，分别标记为 1, 2, 3。
- 大三角形顶点倍染成 i 和 j 的那条边的其他顶点只能使用 i 和 j 两种颜色。
- 不在边上的顶点可以随意染色。

我们的问题是，可不可能存在一种染色方案，使得图中没有一个三角形是三个顶点颜色都不同的？

答案是**不可以**！

引理 9

[2 维 Sperner 引理].

在任一种染色方案下，都存在一个三角形，其三个顶点颜色都不同。

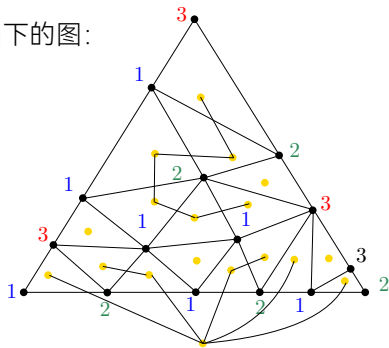
证明. 假设存在一种染色方案使得不存在三色小三角形，即任何一个三角形的顶点至多只有两个颜色，考察其中异色边的数目：

- 任何一个三角形的异色边数目为 2 或者 0，因此总的异色边数目应该是偶数。
- 大三角形上边的异色边数目为奇数，而内部的异色边由于会被计算两次，因此总的异色边数目为偶数；从而所有异色边的数目为奇数，矛盾。

□

我们现在用握手定理给出一个巧妙的证明。我们构造一张如图的图：

- 在大三角形染色为 1, 2 的边外构造一个点。
- 每个小三角形内部构造一个点。
- 如果两个点相连会与一条染色 1, 2 的边相交，则将其相连。



我们有如下的事实：

事实 10.

如果一个内部点的度数是奇数，则其对应的三角形的三个顶点颜色都不同。

注意到外面的顶点度数一定是奇数，因此由握手定理一定存在一个内部点的度数是奇数，引理得证。□

图的基本性质

定义 11

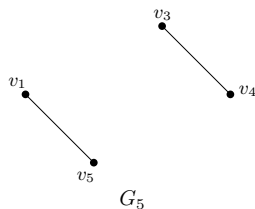
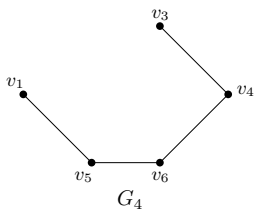
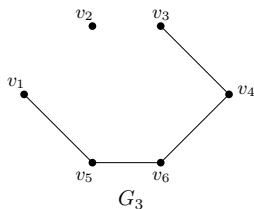
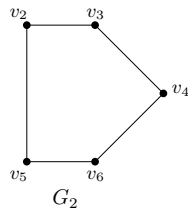
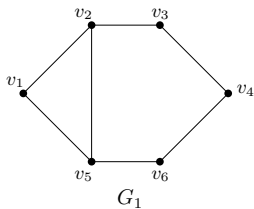
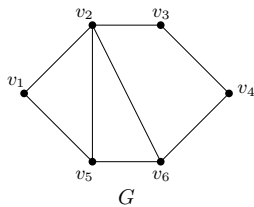
[子图].

给定图 $G = (V, E)$, 如果存在图 $G' = (V', E')$ 满足: $V' \subseteq V, E' \subseteq E$, 则称 G' 是 G 的一个子图。

不同的子图

令 $G' = (V', E')$ 是 $G = (V, E)$ 的子图:

- G' 是 G 的平凡子图, 如果 $G' = G$ 或 $G' = \emptyset$ 。
- G' 是 G 的真子图, 如果其不是平凡的。
- G' 是 G 的生成子图 (支撑子图), 如果 $V' = V$ 。
- G' 是 G 的导出子图, 如果 $E' = \{(u, v) \in E \mid u, v \in V'\}$, 即 G' 蕴含了 G 中由 V' 产生的所有的边。



- G_1, G_3 是 G 的生成子图。
- G_4, G_5 是 G 的导出子图。

图可以看成是顶点和边的集合，因此我们可以对图进行一些集合运算：

定义 12.

给定两个图 $G_1 = (V_1, E_1)$ 和 $G_2 = (V_2, E_2)$ ，定义如下的运算：

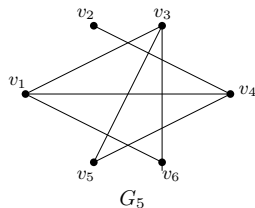
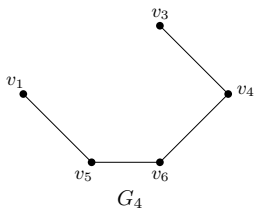
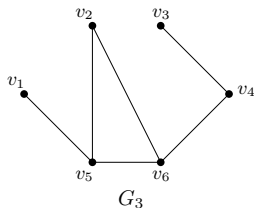
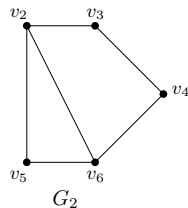
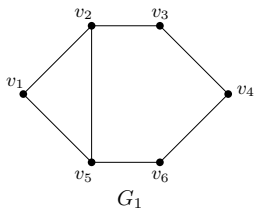
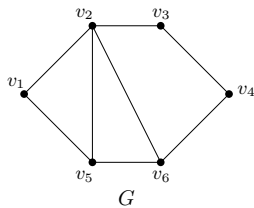
- 并 (union): $G_1 \cup G_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$
- 交 (intersection): $G_1 \cap G_2 = (V_1 \cap V_2, E_1 \cap E_2)$
- 对称差 (symmetric difference): $G_1 \oplus G_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \oplus E_2)$

更常用的则是对于图上顶点和边进行增删的操作：

定义 13.

给定图 $G = (V, E)$ ，定义如下的运算：

- **增加边**：对我们可以添加一条边 (u, v) ，这样得到的图记作 $G + (u, v)$ 。
- **删除顶点**：对于任意的 $u \in V$ ，我们可以删除顶点 u ，以及所有与 u 相关联的边，这样得到的图记作 $G - u$ 。
- **删除边**：对于任意的 $u, v \in V$ ，如果 $(u, v) \in E$ ，则我们可以删除边 (u, v) ，这样得到的图记作 $G - (u, v)$ 。
- **删除子图**：令 H 是 G 的子图，我们可以删除 H ，即删去 H 中所有的边，这样得到的图记作 $G - H$ 。特别的，对于 n 阶简单图，定义 $K_n - G$ 为其补图。



- $G_1 = G - (v_2, v_6)$, $G_2 = G - v_1$
- $G_3 = G - \{(v_2, v_6), (v_1, v_3)\}$, $G_4 = G - v_2$, $G_5 = K_6 - G$

我们再来刻画一下与一个顶点相关联的边的集合：

定义 14.

给定一个无向图 $G = (V, E)$ ，对于其中的一个顶点 $v \in V$ ，我们定义 v 的邻点集为：

$$N(v) = \{u \in V \mid (u, v) \in E\}$$

定义 15.

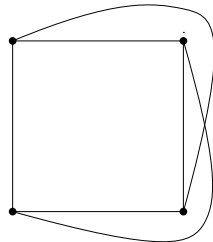
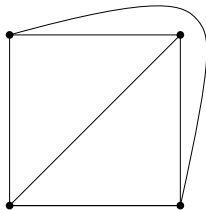
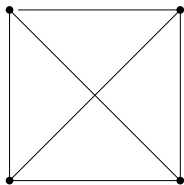
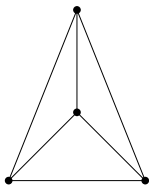
给定一个有向图 $G = (V, E)$ ，对于其中的一个顶点 $v \in V$ ，

- 定义 v 的后继元集为： $\Gamma^+(v) = \{u \mid (v, u) \in E \wedge u \neq v\}$ 。
- 定义 v 的先驱元集为： $\Gamma^-(v) = \{u \mid (u, v) \in E \wedge u \neq v\}$ 。

v 的邻点集 $N(v)$ 则定义为 $\Gamma^+(v) \cup \Gamma^-(v)$ 。

图的同构 (I)

下列图是不一样的么？



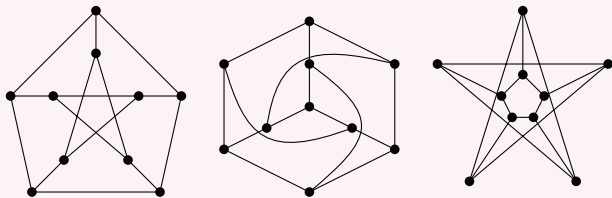
实际上它们是一样的，因为它们的边和点可以一一的对应起来。

定义 16

[图的同构 (Graph Isomorphism)].

给定两个图 $G_1 = (V_1, E_1)$ 和 $G_2 = (V_2, E_2)$, 如果存在一个双射 $\phi: V_1 \rightarrow V_2$, 使得对于任意的 $u, v \in V_1$, $(u, v) \in E_1$ 当且仅当 $(\phi(u), \phi(v)) \in E_2$, 则称 G_1 和 G_2 是**同构的**, 记作 $G_1 \cong G_2$ 。

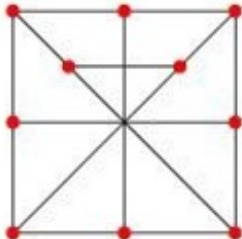
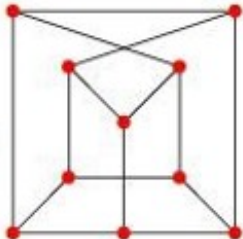
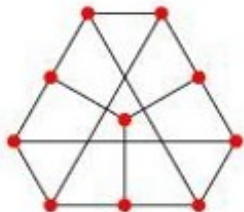
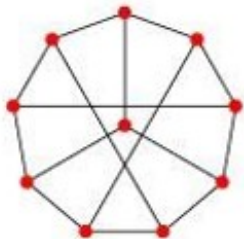
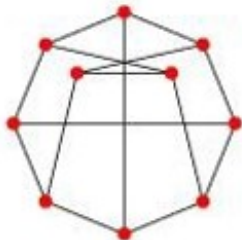
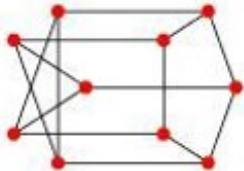
Peterson 图

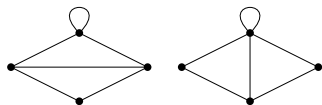


上述三个图是同构的, 都被称为是 Peterson 图。

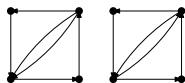
更多的 Peterson 图

下面的图也全都是跟 Peterson 图同构的：

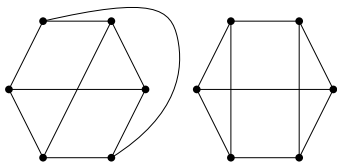




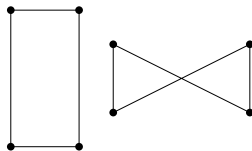
(1)



(2)



(3)



(4)

只有第 (4) 组是同构的!

可以看到，如果两个图要同构，其要满足很多条件，比如：

- 顶点数相同, 边数相同。
- 顶点的度数列相同。
- 存在同构的导出子图。

但是这些条件都不是充分条件，也就是说，如果两个图满足上述条件，它们不一定是同构的。

图同构的判断是困难的！

事实上目前还没有一个多项式时间的算法可以判断两个图是否同构。

- 目前最快的算法是匈牙利科学家 Babai 在 2015 年提出的拟多项式时间算法。
- 它的一个推广问题，即子图同构问题，判断是否存在一个图的子图和另一个图同构，是一个 NP 完全问题。

图的代数表示

我们首先用矩阵来表示图结点之间的邻接关系：

定义 17

[邻接矩阵].

给定 n 阶图 $G = (V, E)$, 其中 $|V| = \{v_1, \dots, v_n\}$. 我们定义其邻接矩阵 $A(G) = (A_{ij})_{n \times n}$ 为:

- A_{ij} 表示 (v_i, v_j) 这条边的数量。
- 如果 G 是无向图, 则 A_{ii} 表示 (v_i, v_i) 数目的两倍。

定义的解释

定义的第二点是为了统一:

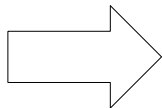
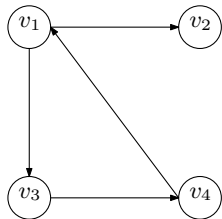
- 直观上我们希望 A_{ij} 表示从 i 到 j 的边的数目。对于无向图, (v_i, v_i) 是一个环, 为了统一因此要计算两次。

定义 18

[简单图的邻接矩阵].

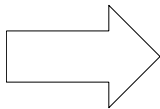
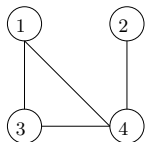
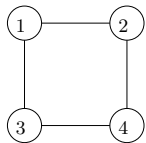
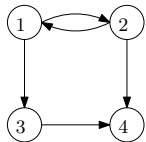
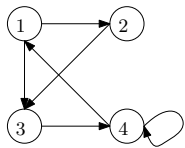
给定一个 n 阶简单图 $G = (V, E)$, 我们定义其邻接矩阵 $A(G) = (A_{ij})_{n \times n}$ 为:

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{如果 } (v_i, v_j) \in E \\ 0 & \text{如果 } (v_i, v_j) \notin E \end{cases}$$



$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

邻接矩阵的例子 (I)



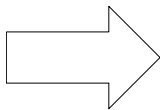
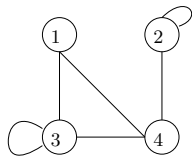
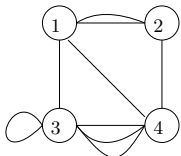
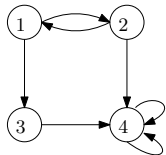
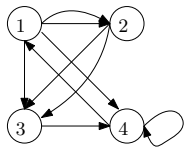
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

邻接矩阵的例子 (II)



$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

事实 19.

对于图 $G = (V, E)$, $|V| = n$, $|E| = m$, 其邻接矩阵 A 满足:

- 如果 G 是有向图, 则对任意的 $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ 有:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} = d^+(v_i), \quad \sum_{j=1}^n a_{ji} = d^-(v_i)$$

- 如果 G 是无向图, 则 A 是对称矩阵, 特别的如果 G 是简单图, 则对于任意的 $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ 有:

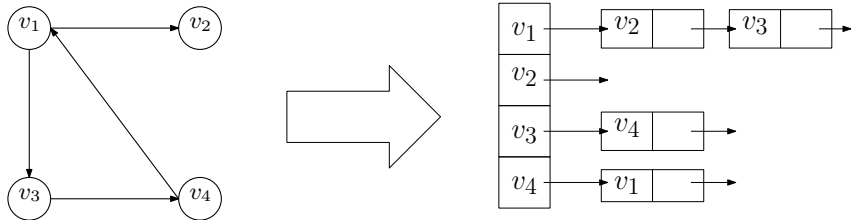
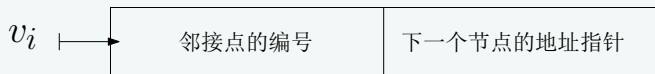
$$\sum_{j=1}^n a_{ij} = \sum_{j=1}^n a_{ji} = d(v_i)$$

在计算机中，还有一种方式来表示图，即邻接表：

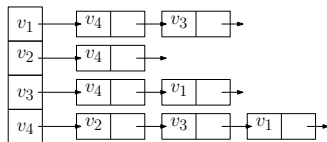
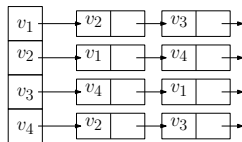
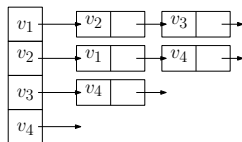
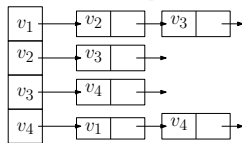
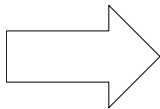
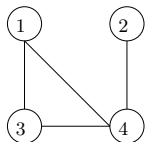
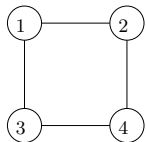
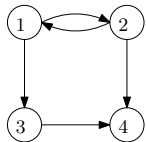
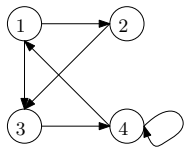
定义 20

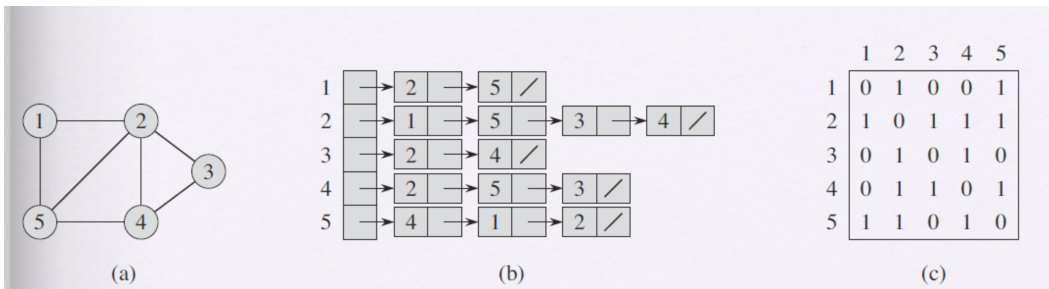
[邻接表].

给定一个 n 阶图 $G = (V, E)$ ，其中 $|V| = \{v_1, \dots, v_n\}$ 。我们定义其邻接表表示为每个顶点的一个链表组成的数组，链表中包含了所有与该顶点相关联的边。



邻接表的例子





图的两种表示:

- 邻接表: i 所对应的列表包含了所有 i 指向的边。
 - 无向图: $n + 2m$
 - 有向图: $n + m$
- 邻接矩阵: $G[i][j]$ 表示顶点 i 和顶点 j 之间是否有边。
 - 无向图: n^2
 - 有向图: n^2

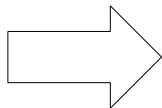
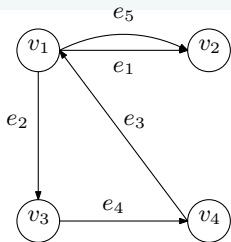
我们再用关联矩阵来表示图节点和边的关系:

定义 21

[有向图的关联矩阵].

给定一个无自环环的有向图 $G = (V, E)$, 其中 $V = \{v_1, \dots, v_n\}$, $E = \{e_1, \dots, e_m\}$ 。我们定义其关联矩阵 $M(G) = (m_{ij})_{n \times m}$ 为:

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{如果 } e_j \text{ 的始点是 } v_i \\ -1 & \text{如果 } e_j \text{ 的终点是 } v_i \\ 0 & \text{如果 } e_j \text{ 与 } v_i \text{ 无关} \end{cases}$$



$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

事实 22.

给定一个无自环的有向图 $G = (V, E)$, 其中 $V = \{v_1, \dots, v_n\}$, $E = \{e_1, \dots, e_m\}$, 其关联矩阵 $M(G)$ 满足:

- e_i 与 e_j 相同当且仅当其为平行边。
- 每一列恰好一个 1 和一个 -1 , 其余为 0。
- 定义如下两个集合:

$$M_+ = \{m_{ij} \mid m_{ij} = 1\}, M_- = \{m_{ij} \mid m_{ij} = -1\}$$

则我们有: $|M_+| = |M_-| = m$.

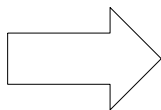
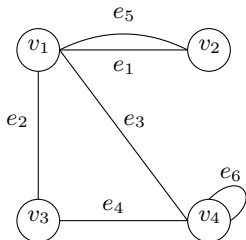
- 对于任意的 $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, 有:
 1. $\sum_{m_{ij} > 0} m_{ij} = d^+(v_i)$
 2. $\sum_{m_{ij} < 0} (-m_{ij}) = d^-(v_i)$

定义 23

给定一个无向图 $G = (V, E)$, 其中 $V = \{v_1, \dots, v_n\}$, $E = \{e_1, \dots, e_m\}$ 。我们定义其关联矩阵 $M(G) = (m_{ij})_{n \times m}$ 为:

$$m_{ij} = \begin{cases} 2 & \text{如果 } e_j = (v_i, v_i) \\ 1 & \text{如果 } e_j = (v_i, v_j) \text{ 或者 } (v_j, v_i) \\ 0 & \text{如果 } e_j \text{ 与 } v_i \text{ 无关} \end{cases}$$

[无向图的关联矩阵].



$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

事实 24.

给定一个无向图 $G = (V, E)$, 其中 $V = \{v_1, \dots, v_n\}$, $E = \{e_1, \dots, e_m\}$, 其关联矩阵 $M(G)$ 满足:

- e_i 与 e_j 相同当且仅当其为平行边。
- 对任意的 $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ 有 $\sum_{i=1}^n m_{ij} = 2$.
- 对任意的 $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ 有 $\sum_{j=1}^m m_{ij} = d(v_i)$.
- $\sum_{i=1}^n d(v_i) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n m_{ij} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m m_{ij} = 2m$
- $\sum_{j=1}^m m_{ij} = 0$ 当且仅当 v_i 是一个孤立点。



本章总结

- 图的基本概念
 - 有向图、无向图
 - 握手定理
- 图的基本性质
 - 子图、图的运算
 - 图的同构
- 图的代数表示
 - 邻接矩阵、邻接表
 - 关联矩阵