

Some Notes for Lec3

LECTURER: 杨启哲

LAST MODIFIED: 2023 年 10 月 8 日

1. $p \oplus q, \neg p \rightarrow q$ 的证明。

- | | |
|--|-------------|
| (1) $p \oplus q$ | (前提引入) |
| (2) $(p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$ | (1, 置换规则) |
| (3) $p \vee q$ | (2, 化简规则) |
| (4) $\neg p$ | (前提引入) |
| (5) q | (3,4 析取三段论) |

2. 公理系统下 $P \rightarrow Q, Q \rightarrow R \vdash P \rightarrow R$ 的证明。

- $P \rightarrow (Q \rightarrow R) \rightarrow ((P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R))$ (公理 2, 令 $A = P, B = Q, C = R$)
- $(Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow (Q \rightarrow R))$ (公理 1, 令 $A = Q \rightarrow R, B = P$)
- $Q \rightarrow R$ (前提)
- $P \rightarrow (Q \rightarrow R)$ (2,3,MP 规则)
- $(P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R)$ (1,4,MP 规则)
- $P \rightarrow Q$ (前提)
- $P \rightarrow R$ (5,6,MP 规则)

3. 公理系统下 $\vdash \neg\neg Q \rightarrow Q$ 的证明。

- | | |
|--|---|
| (1) $(\neg\neg\neg\neg Q \rightarrow \neg\neg Q) \rightarrow (\neg Q \rightarrow \neg\neg\neg Q)$ | (公理 3, 令 $B = \neg\neg\neg Q, A = \neg Q$) |
| (2) $(\neg Q \rightarrow \neg\neg\neg Q) \rightarrow (\neg\neg Q \rightarrow Q)$ | (公理 3, 令 $B = Q, A = \neg\neg Q$) |
| (3) $(\neg\neg\neg\neg Q \rightarrow \neg\neg Q) \rightarrow (\neg\neg Q \rightarrow Q)$ | (1,2 $P \rightarrow Q, Q \rightarrow R \vdash P \rightarrow R$) |
| (4) $\neg\neg Q \rightarrow (\neg\neg\neg\neg Q \rightarrow \neg\neg Q)$ | (公理 1, 令 $A = \neg\neg Q, B = \neg\neg\neg\neg Q$) |
| (5) $\neg\neg Q \rightarrow (\neg\neg Q \rightarrow Q)$ | (3,4 $P \rightarrow Q, Q \rightarrow R \vdash P \rightarrow R$) |
| (6) $(\neg\neg Q \rightarrow (\neg\neg Q \rightarrow Q)) \rightarrow ((\neg\neg Q \rightarrow \neg\neg Q) \rightarrow (\neg\neg Q \rightarrow Q))$ | (公理 2, 令 $A = \neg\neg Q, B = \neg\neg Q, C = Q$) |
| (7) $(\neg\neg Q \rightarrow \neg\neg Q) \rightarrow (\neg\neg Q \rightarrow Q)$ | (5,6, $P \rightarrow Q, Q \rightarrow R \vdash P \rightarrow R$) |
| (8) $\neg\neg Q \rightarrow \neg\neg Q$ | ($\vdash A \rightarrow A$) |
| (9) $\neg\neg Q \rightarrow Q$ | (7,8,MP 规则) |