

第十一周作业

Lecturer: 杨启哲

Last modified: 2024 年 11 月 21 日

截止日期 2023 年 11 月 27 日晚 24: 00

1. 判断下列函数是否是单射、满射、双射，并给予证明。

(1) $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, f(x) = x^2$.

(2) $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 是 } 2 \text{ 的幂} \\ 0, & x \text{ 不是 } 2 \text{ 的幂} \end{cases}$

(3) $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+, f(x) = \frac{1}{x+1}$

(4) $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}, f(x, y) = (\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2})$

2. 令 A, B 是两个有限集满足 $|A| = m, |B| = n$, 考虑如下问题:

(1) A 到 B 的函数有多少个?

(2) A 到 B 的满射有多少个?

(3) A 到 B 的单射有多少个? 并且由上述结论回答, A 到 B 的双射有多少个?

3. 由定义证明: $(0, 1] \approx [a, b]$, 这里 a, b 满足 $a \neq b \in \mathbb{R}$.

4. 令 A 是一个自然数的集合, 对于任何一个自然数 x , 我们定义 $n_A(x)$ 为集合 A 中把 x 拆分成两个不同元素之和的方案总数。例如, 对于集合 $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ 来说 $n_A(4) = 2$, $n_A(2) = 1$ (因为 $4 = 1 + 3 = 0 + 4$, $2 = 0 + 2$)。

考虑如下的集合: 对于任何一个自然数 $x \in \mathbb{N}$, 记 $od(x)$ 表示 x 的二进制表示中 1 的个数, 定义:

- $A = \{x \in \mathbb{N} \mid od(x) \equiv 0 \pmod{2}\}$
- $B = \{x \in \mathbb{N} \mid od(x) \equiv 1 \pmod{2}\}$

请证明:

(1) 对于任何一个自然数 x , $n_A(x) = n_B(x)$.

(2) $\pi = \{A, B\}$ 是自然数集 \mathbb{N} 的一个划分。

5. 课上我们讲到停机问题是不可计算的, 请再给出一个函数 $f: \{0, 1\}^* \rightarrow \{0, 1\}$, 这里 $\{0, 1\}^*$ 指的是由 0, 1 组成的任意长度的串, 证明它是不可计算的。

(hint: 这里可能需要用到的结论是, 我们可以把每个图灵机都用一个自然数去表示, 这意味着我们可以将所有的图灵机按某种顺序排列出来, 而每个图灵机你都可以近似的去理解成一个 $f: \{0, 1\}^* \rightarrow \{0, 1\}$ (严格来说是 partial function)。然后使用对角线方法思考一下吧!)