第十一周作业-Solution

Lecturer: 杨启哲 Last modified: 2024 年 11 月 27 日

1. 判断下列函数是否是单射、满射、双射，并给予证明。

   (1) $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z},\ f(x)=x^2$.

   (2) $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N},\ f(x)=\begin{cases}1, & x\text{是 2 的幂}\\ 0, & x\text{不是 2 的幂}\end{cases}$

   (3) $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+,\ f(x)=\frac{1}{x+1}$

   (4) $f:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}\times\mathbb{R},\ f(x,y)=(\frac{x+y}{2},\frac{x-y}{2})$

   解答.

   (1) 不是单射，因为 $f(1)=f(-1)=1$；不是满射，因为 $f(x)=1$ 无解；不是双射。

   (2) 不是单射，因为 $f(0)=f(3)=1$；不是满射，因为 $f(x)=5$ 无解；不是双射。

   (3) f 是单射，因为 $f(x)=f(y)\Rightarrow x=y$；f 不是满射，因为 $f(x)=10$ 无解，f 不是双射。

   (4) 是单射，因为 $f(x_1,y_1)=f(x_2,y_2)\Rightarrow x_1=x_2,y_1=y_2$；$f$ 是满射，因为对任意 $x,y\in\mathbb{R}$ 有 $f((x+y,x-y))=(x,y)$；因此 f 是双射。

   □

2. 令 A,B 是两个有限集满足 $|A|=m$, $|B|=n$，考虑如下问题:

   (1) A 到 B 的函数有多少个?

   (2) A 到 B 的满射有多少个?

   (3) A 到 B 的单射有多少个? 并且由上述结论回答，A 到 B 的双射有多少个?

   解答.

   (1) 每个元素都有 n 种选择，因此有 n^m 个函数。

   (2) 满射的个数等于函数的个数减去不满射的个数，因此由容斥原理可得一共有:

   $$n^m-\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{i+1}\binom{n}{i}(n-i)^m$$

   个满射函数。

   (3) 单射的个数可以这样计算：先从 B 中选出 m 个元素，然后对这 m 个元素进行全排列，因此有 $m!\cdot\binom{n}{m}$ 个单射函数; 当 $m\neq n$ 时，双射个数为 0；当 $m=n$ 时，双射个数就是其单射个数，即 $m!\cdot\binom{n}{m}=n!$。

   □

3. 由定义证明：$(0,1] \approx [a,b]$，这里 a,b 满足 $a \neq b \in \mathbb{R}$.

解答. 定义 $f:[0,1] \to [a,b]$ 为 $f(x) = x(b-a)+a$，则 f 是一个双射。

- f 是单射，因为 $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$。
- f 是满射，因为对于任意 $y \in [a,b]$，都有 $f(\frac{y-a}{b-a}) = y$。

因此 $[0,1] \approx [a,b]$。下证 $(0,1] \approx [0,1]$。定义函数 $g:(0,1] \to [0,1]$ 为：

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{n+1}, & x = \frac{1}{n} \\ x, & \text{o.w.} \end{cases}$$

不难验证 g 是一个双射，因此 $(0,1] \approx [0,1] \approx [a,b]$。 □

4. 令 A 是一个自然数的集合，对于任何一个自然数 x，我们定义 $n_A(x)$ 为集合 A 中把 x 拆分成两个不同元素之和的方案总数。例如，对于集合 $A = \{0,1,2,3,4\}$ 来说 $n_A(4) = 2$，$n_A(2) = 1$（因为 $4 = 1+3 = 0+4$，$2 = 0+2$）。

考虑如下的集合：对于任何一个自然数 $x \in \mathbb{N}$，记 $od(x)$ 表示 x 的二进制表示中 1 的个数，定义：

- $A = \{x \in \mathbb{N} \mid od(x) \equiv 0 \pmod 2\}$
- $B = \{x \in \mathbb{N} \mid od(x) \equiv 1 \pmod 2\}$

请证明：

(1) 对于任何一个自然数 x，$n_A(x) = n_B(x)$.

(2) $\pi = \{A, B\}$ 是自然数集 $\mathbb{N}$ 的一个划分。

解答.

- 考虑任意 $x \in \mathbb{N}$，对任意 a_1，$a_2 \in A'$ 满足：

$$x = a_1 + a_2$$

令 $a_1 = (i_1 i_2 \ldots i_m)_2$，$a_2 = (j_1 j_2 \ldots j_n)_2$ 为其二进制表示，并且令 l 是从左到右两个数第一个不一样的位置，则我们定义：

$$b_1 = (i_1 i_2 \ldots i_{l-1} j_l i_{l+1} \ldots i_m)_2,\ b_2' = (j_1 j_2 \ldots j_{l-1} i_l j_{l+1} \ldots j_n)_2$$

即将该位置对换一下，显然 $b_1, b_2' \in B'$，并且有：

$$b_1 + b_2' = a_1 + a_2 = x$$

注意到这个映射实际上是个双射，因此我们有 $n_A(x) = n_B(x)$。
- 只要注意到：

- $A \cap B = \emptyset$.
- $A \cup B = \mathbb{N}$.

即可证明 $\pi = \{A, B\}$ 是 $\mathbb{N}$ 的一个划分。

□

5. 课上我们讲到停机问题是不可计算的，请再给出一个函数 $f : \{0,1\}^* \to \{0,1\}$，这里 $\{0,1\}^*$ 指的是由 $0, 1$ 组成的任意长度的串，证明它是不可计算的。

   (hint：这里可能需要用到的结论是，我们可以把每个图灵机都用一个自然数去表示，这意味着我们可以将所有的图灵机按某种顺序排列出来, 而每个图灵机你都可以近似的去理解成一个 $f : \{0,1\}^* \to \{0,1\}$（严格来说是 partial function)。然后使用对角线方法思考一下吧！）

   解答. 定义 $f : \{0,1\}^* \to \{0,1\}$ 为 $f(x) = \begin{cases} 1, & M_x(x) = 0 \\ 0, & M_x(x) = 1 \end{cases}$，其中 M_x 是一个图灵机，x 是其自然数表示。假设 f 是可计算的，则存在一个图灵机 M_{x_0}。考虑输入 x_0，则有：

   - 若 $M_{x_0}(x_0) = 1$，则 $M_{x_0}(x_0) = 0$，矛盾。
   - 若 $M_{x_0}(x_0) = 0$，则 $M_{x_0}(x_0) = 1$，矛盾。

   因此 f 是不可计算的。 □