

### 第十二周作业-Solution

Lecturer: 杨启哲

Last modified: 2024 年 12 月 4 日

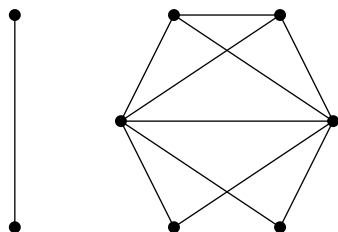
1. 下列各数列中哪些是可图化的？可简单图化的？对于可简单图化的数列给出一个对应的简单图：

- (1) (2, 2, 3, 5, 5, 6, 6)
- (2) (1, 1, 2, 2, 3, 3, 5, 5)
- (3) (2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3)

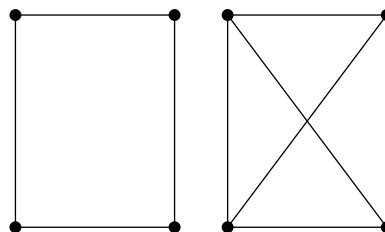
解答.

(1) 该度数序列不可被图化，因为其所有顶点度数之和为奇数，矛盾。

(2) (2) 和 (3) 皆可以被简单图化，如下图所示：



(2)

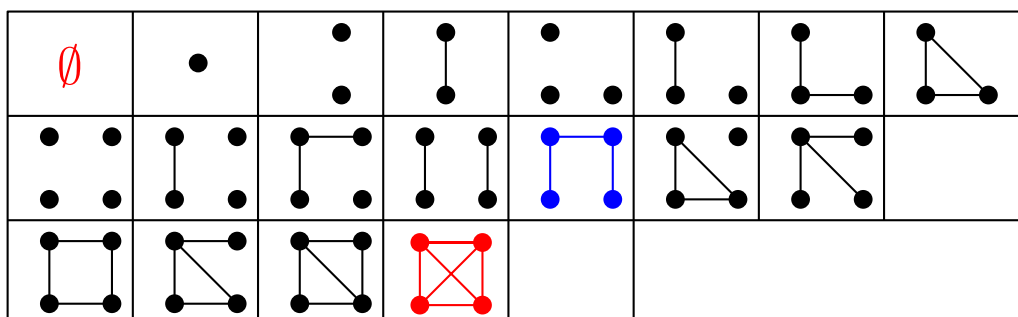


(3)

□

2. 画出完全图  $K_4$  的所有非同构的子图，并且指出哪些图是生成子图。

解答.  $K_4$  的所有非同构子图如下：



其中一共 19 个非同构的子图，其中第二和第三行是生成子图，共 11 个。特别的，标蓝的是自补图，标红的是平凡子图。

□

3. 设  $G$  是  $n$  阶  $n+1$  条边的无向图, 证明:  $G$  中存在顶点  $v$  使得  $d(v) \geq 3$ .

**解答.** 反设  $G$  的任何一个顶点度数均  $\leq 2$ , 则由握手定理:

$$2(n+1) = 2|E| = \sum_{v \in V} d(v) \leq 2 \times n$$

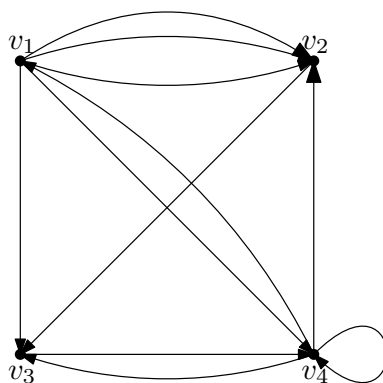
矛盾。 □

4. 设有向图  $D$  的顶点集为  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ , 其邻接矩阵  $A$  为:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

画出  $D$  的示意图, 并求出  $D$  各个顶点的出度与入度。

**解答.**  $D$  的示意图如下: 其中:



- $v_1$  的出度为 4, 入度为 2.
- $v_2$  的出度为 2, 入度为 4.
- $v_3$  的出度为 1, 入度为 3.
- $v_4$  的出度为 4, 入度为 2.

□

5. 设  $G$  是  $n$  阶无向图, 若其补图  $\bar{G}$  与  $G$  同构, 则称  $G$  为自补图. 证明若  $G$  是自补图, 则有  $n \equiv 1(\pmod{4})$  或  $n \equiv 0(\pmod{4})$ .

**解答.** 不妨令  $G$  有  $k$  条边, 则  $\bar{G}$  有  $\frac{n(n-1)}{2} - k$  条边. 由  $\bar{G}$  与  $G$  同构, 我们有:

$$k = \frac{n(n-1)}{2} - k \implies 4k = n(n-1)$$

注意到  $(n, n-1) = 1$ , 从而  $n \equiv 1(\pmod{4})$  或  $n \equiv 0(\pmod{4})$ . □