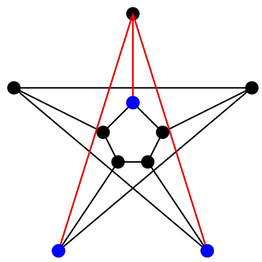
离散数学 Week 13

第十三周作业-Solution

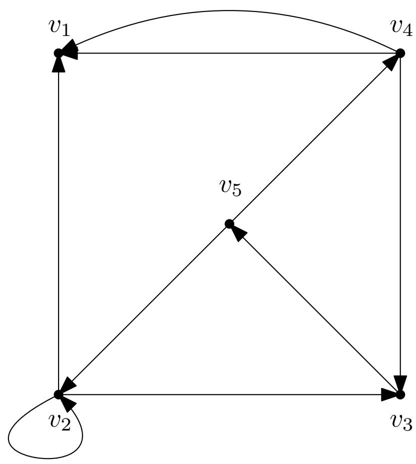
Lecturer: 杨启哲 Last modified: 2024 年 12 月 14 日

1. 试求 Peterson 图 G 的点连通度 $\kappa(G)$ 和边连通度 $\lambda(G)$.



解答. Peterson 图 G 的点连通度 $\kappa(G) = 3$，边连通度 $\lambda(G) = 3$(删去图中蓝色顶点或者红色边会使其有两个连通分支，另一方面可以验证任删两条边或者两个顶点图还是连通的，这是因为删去任何一个点图都是哈密顿图。). □

2. 有向图 G 如下图所示，求:



(1) v_2 到 v_5 一共有多少条长度最多为 3 的通路?

(2) v_2 一共有多少条长度恰为 $1, 2, 3, 4$ 的回路?

(3) 图中长度小于等于 4 的通路数和回路数。

(4) 写出 G 的可达矩阵。

解答. G 的邻接矩阵为:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

计算可得:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, A^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

因此我们有:

(1) v_2 到 v_5 长度最多为 3 的通路数 $= A[2][5] + A^2[2][5] + A^3[2][5] = 2$

(2) v_2 长度恰为 $1, 2, 3, 4$ 的回路恰好为 $A[2][2], A^2[2][2], A^3[2][2], A^4[2][2]$，即 $1, 1, 2, 3$

(3) $\leqslant 4$ 的通路数 $=\sum_{k=1}^{4} \sum_{i,j \leqslant 5}(A^k[i][j]) = 72.$

$\leqslant 4$ 的回路数 $=\sum_{k=1}^{4} \sum_{i \leqslant 5}(A^k[i][i]) = 14.$

(4) G 的可达矩阵如下:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

□

3. 设 G 是 6 阶简单无向图，证明：G 或其补图 $\overline{G}$ 中存在 3 个点彼此相邻。

解答. G 种任取一点 v，则由抽屉原理在 G 或其补图 $\overline{G}$ 一定存在一张图使得有 3 个点与其相邻，不妨设为 G。令与其相邻的点为 v_1, v_2, v_3。则我们有:

- 若 v_1, v_2, v_3 在 G 中不存在边，则 v_1, v_2, v_3 在 $\overline{G}$ 中彼此相邻。
- 若 v_1, v_2, v_3 在 G 中至少存在一条边，不妨记为 (v_1, v_2)，则 v, v_1, v_2 在 G 中彼此相邻。

□

4. 设 $G = (V_1, V_2, E)$ 是 k-正则二分图，$k \geqslant 1$，证明：G 中存在完美匹配。

解答. 先证 $|V_1| = |V_2|$。注意到 G 是 k-正则二分图，故有:

$$k|V_1| = |E| = \sum_{v \in V_1} d(v) = k|V_2| \quad \Rightarrow \quad |V_1| = |V_2|$$

下考虑任意的 $S \subseteq |V_1|$，反设存在 S，使得 $|N(S)| < |S|$，则有：

$$\sum_{v \in N(S)} d(v) \geqslant \sum_{v \in S} d(v) = k|S|$$

注意到 $|N(S)| < k$，从而由抽屉原理，存在 $v \in N(S)$，使得 $d(v) > k$，这与 G 是 k-正则二分图矛盾，故对任意的 $S \subseteq |V_1|$，有 $|N(S)| \geqslant |S|$，从而由 Hall 定理，G 存在完备匹配，由于 $|V_1| = |V_2|$，故 G 存在完美匹配。 □

Remark 0.1

这里，完美匹配其实就是完备匹配，只是是在 $|V_1| = |V_2|$ 的条件的二分图的完备匹配。

5. n 位老师教 n 门课，已知每位教师至少能教两门课程，而每门课程至多有两位老师能教，问：能否每位教师正好教一门课？

解答. 我们将其建模成一张二分图，构造图 $G = (V_1, V_2, E)$，其中：

- V_1 有 n 个顶点，每个顶点 u_1 代表一位老师。
- V_2 有 n 个顶点，每个顶点 v_1 代表一门课程。
- E 中的边 (u_1, v_1) 代表老师 u_1 能教课程 v_1。

由题意，G 满足：

(1) 对任意的 $u \in V_1$, $d(u) \geqslant 2$.

(2) 对任意的 $v \in V_2$, $d(v) \leqslant 2$.

问题转化为：G 中是否存在完备匹配 (完美匹配)?

事实上，注意到：

$$\sum_{u \in V_1} d(u) \geqslant 2n = 2|V_1| = 2|V_2| = \sum_{v \in V_2} d(v)$$

从而：对任意的 $u \in V_1 \cup V_2$，我们有：$d(u) = 2$。从而该图是一个 2-正则二分图，由上一题的结论，该图存在完美匹配，即每位老师正好教一门课。 □