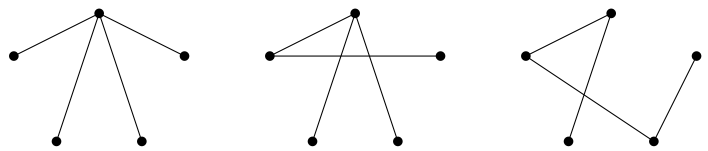
离散数学 Week 14

第十四周作业-Solution

Lecturer: 杨启哲 Last modified: 2024 年 12 月 18 日

1. 请画出完全图 K_5 所有非同构的生成树。

解答. 所有的 K_5 的生成树共 3 个，如下所示: □



2. 证明，若 n 个点的无向图 G 满足：对任意的两个不同的顶点 v 和 w，$d(u)+d(v) \geqslant n$，则 G 中一定存在哈密顿回路。

解答. 注意到，对于任意的 u, v 都有:

$$d(u)+d(v) \geqslant n > n-1$$

从而 G 中存在一条哈密顿通路，记为 $\Gamma = v_1, \ldots, v_n$。下面有两种情况:

- $(v_1, v_n) \in E$，则 $\Gamma \cup \{(v_1, v_n)\}$ 也是一条回路。
- $(v_1, v_n) \notin E$，若存在 $i \in \{3, \ldots, n-1\}$，使得 $(v_1, v_i), (v_{i-1}, v_n) \in E$，则:

$$v_{i-1}, v_n, v_{n-1}, \cdots .v_i, v_1, \ldots, v_{i-2}, v_{i-1}$$

  是一个哈密顿回路。否则，我们有:

$$d(v_1)+d(v_n) \leqslant d(v_1)+(n-1-d(v_1)) = n-1$$

  与条件矛盾，因此这样的 i 一定存在。

□

3. 证明，任何无向树都是二分图。

解答. 之需要注意到无向树中没有环，自然没有奇圈，从而无向树是二分图。 □

4. 令 G 是 n 阶简单无向图 $(n \geqslant 5)$，证明：G 或其补图 $\overline{G}$ 中必有圈。

解答. 我们利用如下事实证明:

- 具有 $\geqslant n$ 条边的 n 阶无向图一定存在一个圈。

由抽屉原理，G 或 $\overline{G}$ 一定存在一个边数 $\geqslant \frac{n(n-1)}{4}$ 的图，反设其都不存在圈的话，我们有:

$$\frac{n(n-1)}{4} \leqslant n-1 \implies n \leqslant 4$$

与 $n \geqslant 5$ 矛盾。 □

Remark 0.1 (关于具有 $\geqslant n$ 条边的 n 阶无向图一定存在一个圈的证明)

该性质可以用归纳法证明。

解答. 我们对 n 进行归纳,$n=1$ 时由于只有自环，命题成立。

假设命题对 $\leqslant n-1$ 个点的图 G 均成立，考察 $|V|=n$ 的情况。我们可以不妨假设 G 是连通的，否则存在一个连通分支 (V',E') 满足 $|V'|<n,|E'|>|V'|$，从而由归纳假设其存在一个圈。现在考虑 G 中的一条边 (u,v):

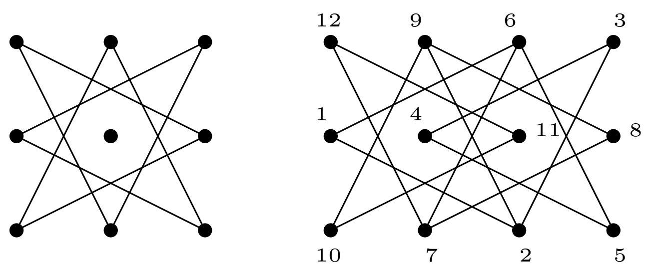
- (u,v) 不是割边，即去除 (u,v) 后还存在一条 u 到 v 的路径 π，则 $(u,v)\pi$ 是一个圈。
- (u,v) 是割边，则删去 (u,v) 后图 G 被分解成两个连通分支，注意到其一定存在一个连通分支 (V',E') 满足 $|V'|<n,|E'|>|V'|$，从而由归纳假设其存在一个圈。

从而命题对 n 也成立。 □

5. 国际象棋中的马走日字，即在 (x,y) 位置的马可以走到 $(x\pm1,y\pm2)$ 或 $(x\pm2,y\pm1)$ 位置（如果这个位置是棋盘上的位置）。马的一个周游指的是可以从棋盘上某个格子开始，走遍所有的格子并且每个格子只走一次:

- 证明：3×4 的棋盘上存在一个马的周游。
- 证明：3×3 的棋盘上不存在马的周游。

解答. 将棋盘转换为图可得:



- 3×4 的棋盘上存在一个马的周游，顺序如右图所示。
- 3×3 的棋盘上不存在马的周游，因为存在一个孤立点。

□