

第一周作业-Solution

Lecturer: 杨启哲

Last modified: 2024 年 9 月 19 日

1. 请判断下列语句哪些是命题？在是命题的句子中，哪些是简单命题？真命题？哪些命题的真值还不知道？

- (1) 9 是合数的充要条件是它是奇数。
- (2) 3 是素数或 4 是素数。
- (3) $2x + 3 < 5$ ，其中 x 是任意实数。
- (4) 对于任意实数 x ， $2x + 3 < 5$ 。
- (5) 你去图书馆么？
- (6) 2024 年中秋是晴天。
- (7) 吸烟请到吸烟室去。

解答.

- 命题: (1)(2)(4)(6)。
- 简单命题: (4)(6)。
- 真命题 (1)(2)
- 不知道真值的命题: (6)。

□

Remark 0.1

这里我们单独说一下 (4)，在后续的一阶逻辑中，该命题可以进一步将量词拆出来，但是对于命题逻辑来说，这是一个无法继续拆分的命题。

2. 将下列命题符号化，并指出各个命题的真值。

- (1) 2 是素数。
- (2) 不但 π 是无理数，而且自然对数的底 e 也是无理数。
- (3) 3 是偶素数。
- (4) 3 不是偶数或 4 不是偶数。
- (5) 这学期，小明只能学英语或者日语中的一门外语课。
- (6) 只要 $2 < 1$ ，就有 $3 < 2$ 。
- (7) 除非 $2 < 1$ ，否则 $3 < 2$ 。
- (8) 只有李老师上课，小明才来听课。

解答. 我们可以将其符号化如下:

- (1) 令 p : 2 是素数。则该命题表示为 p (真)。
- (2) 令 p : π 是无理数, q : e 是无理数。则该命题表示为 $p \wedge q$ (真)。
- (3) 令 p : 3 是偶数, q : 3 是素数。则该命题表示为 $p \wedge q$ (假)。
- (4) 令 p : 3 是偶数, q : 4 是偶数。则该命题表示为 $\neg p \vee \neg q$ (真)。
- (5) 令 p : 这学期小明学英语, q : 这学期小明学日语。则该命题表示为 $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$ (未知)。
- (6) 令 p : $2 < 1$, q : $3 < 2$ 。则该命题表示为 $p \rightarrow q$ (真)。
- (7) 令 p : $2 < 1$, q : $3 < 2$ 。则该命题表示为 $\neg p \rightarrow q$ 或者 $\neg q \rightarrow p$ (真)。
- (8) 令 p : 李老师上课, q : 小明来听课。则该命题表示为 $q \rightarrow p$ (未知)。

□

Remark 0.2

- (1) 第 5 题需要注意的是, 这里的“只能”是指“只能选择一门”, 因此需要排除两个都拿的情况, 即两个都拿时真值需要为假。
- (2) 最后三道题其实都可以从充分和必要条件上来理解, 以最后一句为例。只有李老师上课, 小明才来听课。说明小明来听课的必要条件是李老师上课, 从而为 $q \rightarrow p$ 。另一方面从真值来看, 如果转换为 $p \rightarrow q$, 则蕴含了李老师来上课小明就一定来听课的意思, 这是与原句不符的。

3. 令 p : $2 + 3 = 5$, q : 大熊猫产在中国, r : 太阳从西方升起, 求下列复合命题的真值。

- (1) $p \vee (q \wedge r)$.
- (2) $(p \leftrightarrow r) \wedge (\neg q \vee p)$.
- (3) $(\neg r \wedge q) \rightarrow (p \wedge \neg q)$.

解答. $p = 1, q = 1, r = 0$ 。从而计算可得:

- $p \vee (q \wedge r)$ 为真。
- $(p \leftrightarrow r) \wedge (\neg q \vee p)$ 为假。
- $(\neg r \wedge q) \rightarrow (p \wedge \neg q)$ 为假。

□

4. 用真值表判断下列公式的类型, 并指出它们的成真赋值和成假赋值。

- (1) $((p \wedge q) \rightarrow p) \vee r$.
- (2) $((p \rightarrow r) \wedge q) \rightarrow (p \rightarrow r)$.
- (3) $(\neg(q \rightarrow p)) \wedge p \wedge r$.

解答. 这里只列出真值表最后一项:

(1) $((p \wedge q) \rightarrow p) \vee r$ 为重言式, 所有赋值都是成真赋值。

p	q	r	$((p \wedge q) \rightarrow p) \vee r$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

(2) $((p \rightarrow r) \wedge q) \rightarrow (p \rightarrow r)$ 为重言式, 所有赋值都是成真赋值。

p	q	r	$((p \rightarrow r) \wedge q) \rightarrow (p \rightarrow r)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

(3) $(\neg(q \rightarrow p)) \wedge p \wedge r$ 为矛盾式, 所有赋值都是成假赋值。

p	q	r	$(\neg(q \rightarrow p)) \wedge p \wedge r$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

□

Remark 0.3

第 2 个公式也可以通过代入规则进行判断, 注意到 $(p \wedge q) \rightarrow p$ 是重言式, 从而上述式子可以看成将 p 代入成 $p \rightarrow r$ 生成.

5. 设 A, B 都是含命题变项 p_1, \dots, p_n 的公式, 证明 $A \vee B$ 是矛盾式当且仅当 A 和 B 都是矛盾式。将矛盾式换成重言式, 上述结论还正确么?

解答. 直接使用定义即可。

- \Rightarrow : 假设 $A \vee B$ 是矛盾式, 则对于任意的赋值 $\alpha: \{p_1, \dots, p_n\} \rightarrow \{0, 1\}$, $(A \vee B)(\alpha)$ 为假, 从而 $A(\alpha)$ 和 $B(\alpha)$ 均为假, 即 A, B 在任意赋值下都为假, 为矛盾式。
- \Leftarrow : 假设 A, B 都是矛盾式, 则对于任意的赋值 $\alpha: \{p_1, \dots, p_n\} \rightarrow \{0, 1\}$, $A(\alpha)$ 和 $B(\alpha)$ 均为假, 从而 $(A \vee B)(\alpha)$ 为假, 即 $A \vee B$ 为矛盾式。

若把条件改成重言式, 则结论不成立, 考虑如下的例子:

- $A = \neg p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_n$
- $B = p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_n$

则 $A \vee B$ 是重言式, 但 A 和 B 都不是重言式。 □

Remark 0.4

这里我们用 $P(\alpha)$ 表示将 P 中的命题变项 p_i 用 $\alpha(p_i)$ 赋值后得到的命题公式, 此时该命题公式具有确定的真值。