第二周作业-Solution

Lecturer: 杨启哲

Last modified: 2024 年 10 月 8 日

1. 用等值演算法证明下列等值式。

(1) $p \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$.

(2) $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$.

解答.

(1)

$$\begin{aligned}(p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q) \Leftrightarrow &\quad p \wedge (q \vee \neg q) \\ \Leftrightarrow &\quad p \wedge \mathbf{T} \\ \Leftrightarrow &\quad p\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}(p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q) \Leftrightarrow &\quad (p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q) \\ \Leftrightarrow &\quad (p \wedge (\neg p \vee \neg q)) \vee (q \wedge (\neg p \vee \neg q)) \\ \Leftrightarrow &\quad (p \wedge \neg p) \vee (p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p) \vee (q \wedge \neg q) \\ \Leftrightarrow &\quad \mathbf{F} \vee (p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p) \vee \mathbf{F} \\ \Leftrightarrow &\quad (p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p)\end{aligned}$$

□

2. 用等值演算法判断下列公式的类型。

(1) $\neg((p \wedge q) \rightarrow p)$.

(2) $p \leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q))$.(原来的符号打错了，不是 $\Leftrightarrow$)

(3) $(p \vee q) \rightarrow (p \wedge r)$.

解答.

(1) 注意到:

$$\begin{aligned}\neg((p \wedge q) \rightarrow p) \Leftrightarrow &\quad \neg(\neg(p \wedge q) \vee p) \\ \Leftrightarrow &\quad (p \wedge q) \wedge \neg p \\ \Leftrightarrow &\quad \mathbf{F}\end{aligned}$$

从而该公式是矛盾式。

(2) 注意到:

$$
\begin{aligned}
p \leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)) \Leftrightarrow \quad & p \leftrightarrow (p \wedge (q \vee \neg q)) \\
\Leftrightarrow \quad & p \leftrightarrow (p \wedge \mathbf{T}) \\
\Leftrightarrow \quad & p \leftrightarrow p \\
\Leftrightarrow \quad & \mathbf{T}
\end{aligned}
$$

从而该公式是重言式。

(3) 注意到:

$$
\begin{aligned}
(p \vee q) \to (p \wedge r) \Leftrightarrow \quad & \neg(p \vee q) \vee (p \wedge r) \\
\Leftrightarrow \quad & (\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge r) \\
\Leftrightarrow \quad & (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r)
\end{aligned}
$$

从而该公式是可满足式。

□

Remark 0.1

注意在第二题中，原先的符号打错了，应该是 $\leftrightarrow$，而不是 $\Leftrightarrow$。后者只能表达公式之间的等值关系，但不是构造公式的联结词。

3. 我们可以根据一个命题公式写出其对应的真值表，也可以通过真值表写出满足该真值表的命题公式。比如假设命题公式有三个变量 p, q, r，其取真赋值为 $000, 001, 101$，则我们可以构造如下两个公式:

- $(\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r)$.
- $(p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r)$.

其中第一个式子是根据取真赋值来生成的，每一个括号内的命题公式代表了一个取真赋值，如 $\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r$ 代表了 000 时为真；第二个式子则是根据取假赋值生成的，每一个括号内的命题公式代表了一个取假赋值，如 $(p \vee \neg q \vee r)$ 代表了 010 时为假。请根据上述内容构造下列满足要求的命题公式，假设命题公式均只有 3 个命题变元：p, q, r:

(1) 假设该命题公式为重言式，请根据其取真赋值构造命题公式。

(2) 假设该命题公式的取真赋值为 000 和 111，请分别根据其取真赋值和取假赋值构造两个满足该要求的的命题公式。

解答.

(1) $(p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)$

(2) 由其取真赋值可构造公式：

$$(p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)$$

由其取假赋值可构造公式：

$$(p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r)$$

□

4. 证明关于对偶式和内否式的两个性质：

(1) $(\neg A)^* \Leftrightarrow \neg(A^*)$.

(2) $(\neg A)^- \Leftrightarrow \neg(A^-)$.

解答.

(1) 对 A 的联结词进行归纳：

BASE：$A = p$，则有 $(\neg A)^* = \neg p = \neg(A^*)$，即 $(\neg A)^* \Leftrightarrow \neg(A^*)$。

IH：假设对于 A 的联结词数小于 n 时成立。则当 n 时，A 一定如下三种情况：

(i) $A = \neg A_1$，则由归纳假设有 $(\neg A_1)^* \Leftrightarrow \neg(A_1^*)$，从而：

$$(\neg A)^* \Leftrightarrow (\neg\neg A_1)^* \Leftrightarrow (A_1)^* \Leftrightarrow \neg\neg(A_1^*) \Leftrightarrow \neg((\neg A_1)^*) \Leftrightarrow \neg(A^*)$$

(ii) $A = A_1 \vee A_2$, 则由归纳假设有 $(\neg A_1)^* \Leftrightarrow \neg(A_1^*)$，$(\neg A_2)^* \Leftrightarrow \neg(A_2^*)$，从而：

$$\begin{aligned}(\neg A)^* &\Leftrightarrow (\neg(A_1 \vee A_2))^* \Leftrightarrow (\neg A_1 \wedge \neg A_2)^* \\ &\Leftrightarrow (\neg A_1)^* \vee (\neg A_2)^* \Leftrightarrow \neg(A_1^*) \vee \neg(A_2^*) \Leftrightarrow \neg(A_1^* \wedge A_2^*) \Leftrightarrow \neg(A^*)\end{aligned}$$

(iii) $A = A_1 \wedge A_2$, 则由归纳假设有 $(\neg A_1)^* \Leftrightarrow \neg(A_1^*)$，$(\neg A_2)^* \Leftrightarrow \neg(A_2^*)$，从而：

$$\begin{aligned}(\neg A)^* &\Leftrightarrow (\neg(A_1 \wedge A_2))^* \Leftrightarrow (\neg A_1 \vee \neg A_2)^* \\ &\Leftrightarrow (\neg A_1)^* \wedge (\neg A_2)^* \Leftrightarrow \neg(A_1^*) \wedge \neg(A_2^*) \Leftrightarrow \neg(A_1^* \vee A_2^*) \Leftrightarrow \neg(A^*)\end{aligned}$$

(2) 对 A 的联结词进行归纳：

BASE：$A = p$，则有 $(\neg A)^- = p \Leftrightarrow \neg\neg p = \neg(A^-)$，即 $(\neg A)^- \Leftrightarrow \neg(A^-)$。

IH：假设对于 A 的联结词数小于 n 时成立。则当 n 时，A 一定如下三种情况：

(i) $A = \neg A_1$，则由归纳假设有 $(\neg A_1)^- \Leftrightarrow \neg(A_1^-)$，从而：

$$(\neg A)^- \Leftrightarrow (\neg\neg A_1)^- \Leftrightarrow (A_1)^- \Leftrightarrow \neg\neg(A_1^-) \Leftrightarrow \neg((\neg A_1)^-) \Leftrightarrow \neg(A^-)$$

(ii) $A = A_1 \vee A_2$, 则由归纳假设有 $(\neg A_1)^- \Leftrightarrow \neg(A_1^-)$，$(\neg A_2)^- \Leftrightarrow \neg(A_2^-)$，从而：

$$\begin{aligned}(\neg A)^- &\Leftrightarrow (\neg(A_1 \vee A_2))^- \Leftrightarrow (\neg A_1 \wedge \neg A_2)^- \\ &\Leftrightarrow (\neg A_1)^- \wedge (\neg A_2)^- \Leftrightarrow \neg(A_1^-) \wedge \neg(A_2^-) \Leftrightarrow \neg(A_1^- \vee A_2^-) \Leftrightarrow \neg(A^-)\end{aligned}$$

(iii) $A = A_1 \wedge A_2$, 则由归纳假设有 $(\neg A_1)^- \Leftrightarrow \neg(A_1^-)$，$(\neg A_2)^- \Leftrightarrow \neg(A_2^-)$，从而：

$$\begin{aligned}(\neg A)^- &\Leftrightarrow (\neg(A_1 \wedge A_2))^- \Leftrightarrow (\neg A_1 \vee \neg A_2)^- \\ &\Leftrightarrow (\neg A_1)^- \vee (\neg A_2)^- \Leftrightarrow \neg(A_1^-) \vee \neg(A_2^-) \Leftrightarrow \neg(A_1^- \wedge A_2^-) \Leftrightarrow \neg(A^-)\end{aligned}$$

□

Remark 0.2

我将两个完整的结构归纳法的证明都写了出来，方便大家理解，可以看到总体是很像的，但在运算推导的过程中需要仔细区分。

5. 在某班班委成员的选举中，已知王小红、李强、丁金生三位同学被选进了班委会。该班的甲乙丙三位同学对此事发表了如下言论:

(1) 甲：王小红为班长. 李强为生活委员。

(2) 乙：丁金生为班长, 王小红为生活委员。

(3) 丙: 李强为班长, 王小红为学习委员。

已知上述三位同学都恰好猜对了一半，请尝试使用等值演算法求出王小红、李强、丁金生分别担任了什么职位?

(Hint: 先将上述语句符号化，再通过等值演算)

解答. 令:

p_1 :王小红为班长	p_2 :李强为生活委员	p_3 :丁金生为班长
p_4 :王小红为生活委员	p_5 :李强为班长	p_6 :王小红为学习委员

则上述论断满足:

- 甲：$A_1 : p_1 \oplus p_2$.
- 乙：$A_2 : p_3 \oplus p_4$.
- 丙：$A_3 : p_5 \oplus p_6$.
- 班长只有一个: $A_4 : (p_1 \wedge \neg p_3 \wedge \neg p_5) \vee (\neg p_1 \wedge p_3 \wedge \neg p_5) \vee (\neg p_1 \wedge \neg p_3 \wedge p_5)$.
- 李强只能担任一个职位：$A_5 : \neg p_2 \vee \neg p_5$.
- 王小红只能担任一个职位：$A_6 : (p_1 \wedge \neg p_4 \wedge \neg p_6) \vee (\neg p_1 \wedge p_4 \wedge \neg p_6) \vee (\neg p_1 \wedge \neg p_4 \wedge p_6)$.

从而上述论断等价于:

$$A : A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \wedge A_4 \wedge A_5 \wedge A_6$$

可满足。通过等值演算法可以得到:

$$A \Leftrightarrow \neg p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \neg p_4 \wedge \neg p_5 \wedge p_6$$

即：王小红为学习委员，李强为生活委员，丁金生为班长。 □

Remark 0.3

这道题也可以通过简单推理的方式得到，使用等值演算法会显得较为繁琐。但是这给了我们一个很好的例子，即如何把一些自然语言的论断转化为逻辑公式，毕竟后面的计算过程可以交给计算机。