离散数学 Week 3

# 第三周作业-Solution

Lecturer: 杨启哲 Last modified: 2024 年 10 月 12 日

1. 先分别求下列公式的一个合取范式和析取范式，再求出其的主合取范式和主析取范式。

   (1) $(p \wedge q) \vee r$.

   (2) $(p \vee (q \wedge r)) \to (p \vee q \vee r)$.

**解答.**

(1) 计算可得:

- 其合取范式可为: $(p \vee r) \wedge (q \vee r)$.
- 其析取范式可为: $(p \wedge q) \vee r$.
- 其主合取范式可为: $(p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee r)$ $(M_0 \wedge M_2 \wedge M_4)$.
- 其主析取范式可为: $(\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge r)$ $(m_1 \vee m_3 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7)$

(2) 利用等值演算计算可得:

- 其合取范式可为:1.
- 其析取范式可为: $(\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge \neg r) \vee p \vee q \vee r$.
- 其主合取范式为 1。
- 其主析取范式为 $m_0 \vee m_1 \vee m_2 \vee m_3 \vee m_4 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7$.

□

2. 已知公式 $A$ 含 3 个变量 $p, q, r$, 其成真赋值为 000 和 111，求 $A$ 的主析取范式和主合取范式。

**解答.**

- 其主合取范式为：$(p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r)(M_1 \wedge M_2 \wedge M_3 \wedge M_4 \wedge M_5 \wedge M_6)$.
- 其主析取范式为：$(\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge r)(m_0 \vee m_7)$.

□

**Remark 0.1（对于第 2, 3 题）**

可以看到，合取范式和析取范式是不唯一的; 但主合取范式和主析取范式是**唯一**的，书写的时候需要注意**顺序**。

3. 将下列公式化成与之等值的仅含 $\{\neg, \wedge\}$ 中联结词的命题公式:

(1) $(p \leftrightarrow r) \wedge q$.

(2) $(p \to (q \wedge \neg p)) \wedge q \wedge r$.

**解答.**

- $(p \leftrightarrow r) \wedge q = ((p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)) \wedge q = \neg((\neg(p \wedge q)) \wedge (\neg(\neg p \wedge \neg q))) \wedge q$.
- $(p \to (q \wedge \neg p)) \wedge q \wedge r = \neg\neg((p \to (\neg\neg(q \wedge \neg p))) \wedge q \wedge r) = \neg((\neg p \vee (\neg(\neg q \vee p))) \vee \neg q \vee \neg r)$.

□

4. 用消解法判断下列公式是否是可满足的:

(1) $(\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee r) \wedge (\neg r \vee p) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r)$.

(2) $(p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee r)$

**Remark 0.2**

如果能找到一个成真赋值使得公式成立，则公式是可满足的。但这道题希望大家只用消解法来判断，看一下如果一个公式是可满足的，消解法最终会如何停止。(即不会产生新的公式)

**解答.**

- $(\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee r) \wedge (\neg r \vee p) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r)$ 是可满足的:
  - $\neg p \vee q, \neg q \vee r$ 消解出 $\neg p \vee r$.
  - $\neg q \vee r, \neg r \vee p$ 消解出 $\neg q \vee p$.
  - $\neg r \vee p, \neg p \vee q$ 消解出 $\neg r \vee q$.
  - $\neg r \vee q, \neg q \vee r$ 消解出 $r \vee \neg r = 1$(**这不是停止!**)
  - $\neg p \vee \neg q \vee \neg r, \neg p \vee q$ 消解出 $\neg p \vee \neg r$.
  - $\neg p \vee \neg q \vee \neg r, \neg q \vee r$ 消解出 $\neg p \vee \neg q$.
  - $\neg p \vee \neg q \vee \neg r, \neg r \vee p$ 消解出 $\neg q \vee \neg r$.
  - $\neg p \vee \neg q, \neg p \vee q$ 消解出 $\neg p$.
  - $\neg p \vee \neg r, \neg r \vee p$ 消解出 $\neg r$.
  - $\neg q \vee \neg r, \neg q \vee r$ 消解出 $\neg q$.

  最终不能产生新的简单析取式，从而该公式是可满足的。
- $(p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee r)$ 也是可满足的:
  - $p \vee q, p \vee \neg q$ 消解成 $p$。
  - $p \vee q, \neg p \vee r$ 消解成 $q \vee r$.
  - $p \vee \neg q, \neg p \vee r$ 消解成 $\neg q \vee r$。
  - $q \vee r, \neg q \vee r$ 消解成 $r$.
  - $q \vee r, p \vee \neg q$ 消解成 $r \vee p$.

  最终不能产生新的简单析取式，从而该公式是可满足的。

□

5. 令 $S$ 是一个合取范式，$l$ 是一个出现在 $S$ 中的文字，并且满足 $l^c$ 不出现在 $S$ 中。这里 $l^c$ 的定义为：

$$l^c = \begin{cases} p, & \text{如果} l = \neg p \\ \neg p, & \text{如果} l = p \end{cases}$$

将所有含有 $l$ 的简单析取式去掉后得到的合取范式记为 $S_l$。证明 $S$ 与 $S_l$ 是同可满足的。

**解答.** 令 $S$ 中出现的变元为 $p_1, \ldots, p_n, l$:

- 假设 $S$ 是可满足的，则存在一个赋值 $\mathcal{A} : \{p_1, \ldots, p_n, l\} \to \{0, 1\}$ 使得 $S$ 为真。构造赋值 $\mathcal{A}' : \{p_1, \ldots, p_n\} \to \{0, 1\}$ 满足 $\mathcal{A}'(p_i) = \mathcal{A}(p_i)$，则由 $S_l$ 的定义，$S_l$ 在赋值 $\mathcal{A}'$ 下也为真，即 $S_l$ 是可满足的。
- 假设 $S_l$ 是可满足的，则则存在一个赋值 $\mathcal{A} : \{p_1, \ldots, p_n\} \to \{0, 1\}$ 使得 $S_l$ 为真。令 $l_k$ 为 $l$ 成真的赋值，则构造赋值 $\mathcal{A}' : \{p_1, \ldots, p_n, l\} \to \{0, 1\}$ 满足:

  $$\mathcal{A}'(p) = \begin{cases} \mathcal{A}(p) \text{ if } p = p_i \\ l_k \text{ if } p = l \end{cases}$$

  容易验证 $S$ 在此赋值下为真，从而 $S$ 是可满足的。

$\square$

6. 对下面的前提提出两个结论，要求一个是有效的，一个是无效的。

- 前提：$p \leftrightarrow q$. $q \to r$.
- 前提：$(p \wedge q) \to r$. $\neg r, q$.

**解答.**

- 正确结论：$p \to r$.
  错误结论：$r \to q$.
- 正确结论：$\neg p$.
  错误结论：$p$.

$\square$

7. 将下列推理形式化，并证明该推理是不正确的。

**如果 $a$ 和 $b$ 之积是负数，那么 $a$ 和 $b$ 恰好一个是负数。$a$ 和 $b$ 之积不是负数，所以 $a$ 和 $b$ 都不是负数。**

**解答.** 令 $p : a$是负数，$q : b$是负数, $r : ab$之积是负数，则推理可表示为:

$$\{r \to p \oplus q, \neg r\} \vdash \neg p \wedge \neg q$$

该推理是不正确的，因为在 $p = 1, q = 1, r = 0$ 这一赋值下前提为真，但结论为假。 $\square$

8. 在自然推理系统 P 中构造下面推理的证明:

(1) $\{p \to q. \neg(q \land r), r\} \vdash \neg p$

(2) $\{\neg p \lor r, \neg q \lor s, p \land q\} \vdash t \to (r \land s)$

**解答.**

- 证明过程如下:

| | | |
|---|---|---|
| (1) | $\neg(q \land r)$ | 前提 |
| (2) | $\neg q \lor \neg r$ | 置换 |
| (3) | $r$ | 前提 |
| (4) | $\neg q$ | 2,3 析取三段论 |
| (5) | $p \to q$ | 前提 |
| (6) | $\neg p$ | 拒取 |

- 我们证明 $\{\neg p \lor r, \neg q \lor s, p \land q, t\} \vdash (r \land s)$。证明过程如下:

| | | |
|---|---|---|
| (1) | $p \land q$ | 前提 |
| (2) | $p$ | 1, 化简 |
| (3) | $\neg p \lor r$ | 前提 |
| (4) | $r$ | 2,3 析取三段论 |
| (5) | $q$ | 1, 化简 |
| (6) | $\neg q \lor s$ | 前提 |
| (7) | $s$ | 5,6 析取三段论 |
| (8) | $r \land s$ | 4,7 合取引入 |

□

**Remark 0.3**

这里把利用的推理规则写出来是方便同学们理解，实际并不需要一定全部写明。