离散数学 Week 5

第五周作业-Solution

Lecturer: 杨启哲 Last modified: 2024 年 10 月 12 日

1. 用自然推理系统 P 构造下面推理的证明:

   如果今天是星期六，我们就要到颐和园或圆明园去玩。如果颐和园游人太多，我们就不去颐和园玩。今天是星期六，颐和园游人太多，所以我们去圆明园玩。

   解答. 令 p : 今天是星期六，q : 我们去颐和园玩，r : 我们去圆明园玩，s : 颐和园游人太多，则上述推理形式化为:

   $$\{p \to (q \vee r),\ s \to \neg q, p, s\} \vdash r$$

(1) p	前提引入
(2) $p \to (q \vee r)$	前提引入
(3) $q \vee r$	1,2 分离
(4) s	前提引入
(5) $s \to \neg q$	前提引入
(6) $\neg q$	4,5 分离
(7) r	3,6 析取三段论

   □

2. 分别利用 CP 规则 (附加前提) 和不利用 CP 规则证明下列推理:

   $$\{(p \vee q) \to (r \wedge s), (s \vee t) \to u\} \vdash p \to u$$

   解答. 利用 CP 规则，等价于需要证明:

   $$\{(p \vee q) \to (r \wedge s), (s \vee t) \to u, p\} \vdash u$$

(1) p	前提引入
(2) $p \vee q$	1 附加
(3) $(p \vee q) \to (r \wedge s)$	前提引入
(4) $r \wedge s$	2,3 分离
(5) s	4 化简
(6) $s \vee t$	5 附加
(7) $(s \vee t) \to u$	前提引入
(8) u	6,7 分离

不利用 CP 规则，直接构造下列证明：

(1)	1	前提引入
(2)	$p \vee \neg p$	1 置换
(3)	$p \vee \neg p \vee q$	2 附加
(4)	$p \to (p \vee q)$	3 置换
(5)	$(r \wedge s) \to s$	1 置换
(6)	$s \to (s \vee t)$	1 置换
(7)	$(p \vee q) \to (r \wedge s)$	前提引入
(8)	$(s \vee t) \to u$	前提引入
(9)	$p \to u$	4,7,5,6,8 假言三段

□

Remark 0.1

在不利用 CP 规则的证明中，我们省略了 $5, 6, 9$ 的具体流程；$5, 6$ 的证明跟 4 类似，9 是若干个连续的假言三段论。

3. 在一阶逻辑中，分别在 (a)，(b) 时将下列命题符号化，并讨论个命题的真值。

- 凡是整数都能被 2 整除。
- 有的整数不能被 2 整除。

(a) 个体域为自然数集合 $\mathbb{N}$。

(b) 个体域为实数集合 $\mathbb{R}$。

解答. 令 $P(x)$ 表示 x 能被 2 整除，$Q(x)$ 表示为 x 是整数，则在 $\mathbb{N}$ 中：

- 命题可以表示为 $\forall x P(x)$，为假命题。
- 命题可以表示为 $\exists x Q(x)$，为真命题。

在 $\mathbb{R}$ 中：

- 命题可以表示为 $\forall x Q(x) \to P(x)$，为假命题。
- 命题可以表示为 $\exists x Q(x) \wedge P(x)$，为真命题。

□

4. 在一阶逻辑中将下列命题符号化，这里个体域是全总个体域。

(1) 没有不能表示成分数的有理数。

(2) 在上海卖菜的不全是外地人。

(3) 不存在比所有火车都快的汽车。

(4) 说凡是汽车就比火车慢是不对的。

解答.

(1) 令 $P(x)$ 表示 x 是有理数，$Q(x)$ 表示 x 是分数，则该命题可以表示为 $\neg\exists x(P(x)\land\neg Q(x))$。

(2) 令 $P(x)$ 表示 x 在上海卖菜，$Q(x)$ 表示 x 是外地人，则该命题可以表示为 $\neg\forall x(P(x)\to Q(x))$。

(3) 令 $P(x)$ 表示 x 是火车，$Q(x)$ 表示 x 是汽车，$R(x,y)$ 表示 x 比 y 快，则该命题可以表示为 $\neg(\exists x\forall y Q(x)\land(P(y)\to R(x,y)))$。

(4) 令 $P(x)$ 表示 x 是火车，$Q(x)$ 表示 x 是汽车，$R(x,y)$ 表示 x 比 y 慢，则该命题可以表示为 $\neg(\forall x\forall y((P(x)\land Q(y))\to R(y,x)))$。

□

5. 假设符号集包括常量 a, 函数 f，谓词符号 F, G。给定解释 $I=(\mathbb{R},\mathfrak{a})$ 和赋值 σ 如下:

(1) 个体域为实数集合 $\mathbb{R}$。

(2) $\mathfrak{a}(a)=0$。

(3) $\mathfrak{a}(f)(x,y)=x+y$.

(4) $\mathfrak{a}(F)(x,y)=x\equiv y$, $\mathfrak{a}(G)(x,y)=x>y$.

(5) $\sigma(x)=1$, $\sigma(y)=-1$

给出下列公式在 I 和 σ 下的解释，并指出它们的真值。

(1) $\forall x(G(x,y)\to\exists yF(x,y))$.

(2) $\forall y(F(f(x,y),a)\to\forall xG(x,y))$.

解答.

(1) $\forall x((x>-1)\to(\exists y\ x\equiv y))$，真命题。

(2) $\forall y((1+y\equiv 0)\to(\forall x\ x>y))$，假命题。

□