离散数学 Week 6

# 第六周作业-Solution

Lecturer: 杨启哲 Last modified: 2024 年 10 月 25 日

1. 分别给出一个成真和成假的解释，来说明下列公式是可满足式。

(1) $\exists x F(x) \to F(x)$.

(2) $\exists x(F(x) \wedge \forall y(G(y) \wedge H(x,y)))$.

**解答.** 不妨假定个体域均为自然数集合 $\mathbb{N}$。

- 考察解释 $\mathfrak{I}_1$, 其中 $\sigma(x) = 1, \mathfrak{a}(F)(x) = x > 1$, 则上述公式在该解释下为 $(\exists x\, x > 1) \to (1 > 1)$, 为假。

  考察解释 $\mathfrak{I}_2$, 其中 $\sigma(x) = 2, \mathfrak{a}(F)(x) = x > 1$, 则上述公式在该解释下为 $(\exists x\, x > 1) \to (2 > 1)$, 为真。
- 考察解释 $\mathfrak{I}_1$，其中 $\mathfrak{a}(F)(x) = x > 1, \mathfrak{a}(G)(x) = x > 0, \mathfrak{a}(H)(x,y) = x > y$，则上述公式在该解释下为 $\exists x\ ((x > 1) \wedge \forall y((y > 0) \wedge (x > y))$, 为假。

  考察解释 $\mathfrak{I}_2$，其中 $\mathfrak{a}(F)(x) = x > 1, \mathfrak{a}(G)(x) = x > 0, \mathfrak{a}(H)(x,y) = x + y > 0$，则上述公式在该解释下为 $\exists x\ ((x > 1) \wedge \forall y((y > 0) \wedge (x + y > 0))$, 为真。

□

2. 判断下列公式的类型：

(1) $F(x) \to \forall x F(x)$.

(2) $\forall x(F(x) \to G(x)) \to (\forall x F(x) \to \forall x G(x))$.

**解答.**

(1) 该公式为可满足式。
- 令解释 $\mathfrak{I}$ 取为 $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A} = (\mathbb{R}, \mathfrak{a}), \sigma)$，其中 $\mathfrak{a}(F)(x) = x \geqslant 0$，赋值 $\sigma$ 满足；$\sigma(x) = 1$, 则该公式在 $I$ 下为假。
- 令解释 $\mathfrak{I}$ 取为 $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A} = (\mathbb{N}, \mathfrak{a}), \sigma)$，其中 $\mathfrak{a}(F)(x) = x \geqslant 0$，赋值 $\sigma$ 满足；$\sigma(x) = 1$, 则该公式在 $I$ 下为真。

(2) 该公式为永真式。考察任意一个解释 $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \sigma)$，其中 $\mathfrak{A} = (D, \mathfrak{a})$:
- 若在 $\mathfrak{I}$ 下 $\forall x(F(x) \to G(x))$ 为假，则整个公式在 $\mathfrak{I}$ 下为真。
- 若在 $\mathfrak{I}$ 下 $\forall x(F(x) \to G(x))$ 为真，则对任意的 $a \in D$，均有 $\mathfrak{a}(F)(a) \to \mathfrak{a}(G)(a)$; 若存在 $a$ 使得 $\mathfrak{a}(F)(a)$ 为假，则 $\forall x F(x)$ 在 $\mathfrak{I}$ 下为假，从而 $\forall x F(x) \to \forall x G(x)$ 在 $\mathfrak{I}$ 下为真; 若对任意的 $a \in D$，均有 $\mathfrak{a}(F)(a)$ 为真，则对任意的 $a \in D$，均有 $\mathfrak{a}(G)(a)$ 为真，从而 $\forall x F(x) \to \forall x G(x)$ 在 $\mathfrak{I}$ 下为真。

因此整个公式在 $\mathfrak{I}$ 下为真，由 $\mathfrak{I}$ 的任意性可知该公式为永真式。

$\square$

3. 请指出下列等值演算中的两处错误：

$$\begin{aligned}&\neg\exists x\forall y(F(x)\wedge(G(y)\to H(x,y)))\\ \Leftrightarrow\ &\forall x\exists y(F(x)\wedge(G(y)\to H(x,y)))\\ \Leftrightarrow\ &\forall x\exists y((F(x)\wedge G(y))\to H(x,y))\end{aligned}$$

**解答.** 两处错误分别在

(1) 第一步，$\neg\exists x\forall y(F(x)\wedge(G(y)\to H(x,y)))$ 的否定应该是 $\forall x\exists y\neg((F(x)\wedge(G(y)\to H(x,y))))$。

(2) 第二步，$F(x)\wedge(G(y)\to H(x,y))\not\Leftrightarrow(F(x)\wedge G(y))\to H(x,y)$

$\square$

4. 利用定义证明 $(\forall xP(x)\wedge\forall xQ(x))\leftrightarrow(\forall x(P(x)\wedge Q(x)))$ 是永真式，并给出一个解释说明当 $\wedge$ 换成 $\vee$ 上式就不是永真式了。

**解答.** 考察任意一个解释 $\mathfrak{I}=(\mathfrak{A},\sigma)$，其中 $\mathfrak{A}=(D,\mathfrak{a})$：

- 若在 $\mathfrak{I}$ 下 $\forall x(F(x)\wedge G(x))$ 为真，则对任意的 $a\in D$，均有 $\mathfrak{a}(F)(a)\wedge\mathfrak{a}(G)(a)$ 为真，从而 $\forall xF(x)$ 和 $\forall xG(x)$ 在 $\mathfrak{I}$ 下为真。
- 若在 $\mathfrak{I}$ 下 $\forall xP(x)\wedge\forall xQ(x)$ 为真，则 $\forall xP(x)$ 和 $\forall xQ(x)$ 在在 $\mathfrak{I}$ 下均为真，即对任意的 $a\in D$，均有 $\mathfrak{a}(P)(a)$ 和 $\mathfrak{a}(Q)(a)$ 为真，从而 $\forall x(P(x)\wedge Q(x))$ 在 $\mathfrak{I}$ 下为真。

因此整个公式在 $\mathfrak{I}$ 下为真，由 $\mathfrak{I}$ 的任意性可知该公式为永真式。

若换成 $\vee$ 则不再为永真式，考察如下的一个解释 $\mathfrak{I}$ 取为 $\mathfrak{I}=(\mathfrak{A}=(\mathbb{Z},\mathfrak{a}),\sigma)$，其中：

- $\mathfrak{a}(P)(x)=x$为偶数
- $\mathfrak{a}(Q)(x)=x$为奇数。

则 $\forall xP(x)\vee\forall xQ(x)$ 在 $\mathfrak{I}$ 下为假，而 $\forall x(P(x)\vee Q(x))$ 在 $\mathfrak{I}$ 下为真，从而上述公式为假。 $\square$