

第七周作业-Solution

Lecturer: 杨启哲

Last modified: 2024 年 11 月 4 日

1. 设个体域 $\mathcal{D} = \{a, b\}$, 消去下列各式的量词。

- $\exists x \forall y (F(x) \wedge G(y))$.
- $\forall x (F(x, y) \rightarrow \exists y G(y))$

解答.

- $((F(a) \wedge G(a)) \wedge (F(a) \wedge G(b))) \vee ((F(b) \wedge G(a)) \wedge (F(b) \wedge G(b)))$.
- $(F(a, y) \rightarrow (G(a) \vee G(b))) \wedge (F(b, y) \rightarrow (G(a) \vee G(b)))$

□

Remark 0.1

(1) 还是关键要区分**自由变元**和**约束变元**。

(2) 也可以对公式进行等值演算进行简化:

- (i) $(F(a) \vee F(b)) \wedge G(a) \wedge G(b)$.
- (ii) $(F(a, y) \vee F(b, y)) \rightarrow (G(a) \vee G(b))$.

2. 求下列各式的前束范式。

- $\forall x F(x) \rightarrow \forall y G(x, y)$
- $\forall x F(x) \rightarrow \forall x G(x, y)$
- $\forall x (F(x, y) \rightarrow \exists y G(x, y, z))$

解答.

- $\exists u \forall y (F(u) \rightarrow G(x, y))$.
- $\exists x \forall u (F(u) \rightarrow G(u, y))$.
- $\forall x \exists u (F(x, y) \rightarrow G(x, u, z))$

□

Remark 0.2

需要注意, 量词前移的时候可能会发生量词的改变。

3. 在自然推理系统 $N_{\mathcal{L}}$ 中, 构造下列推理的证明:

$$\{\forall x(F(x) \vee G(x)), \neg \exists xG(x)\} \vdash \exists xF(x)$$

解答. (1) $\forall x(F(x) \vee G(x))$	前提引入
(2) $F(c) \vee G(c)$	1, \forall_-
(3) $\neg \exists xG(x)$	前提引入
(4) $\forall x\neg G(x)$	3, 代换
(5) $\neg G(c)$	4, \forall_-
(6) $F(c)$	2, 5 析取三段论
(7) $\exists xF(x)$	6, \exists_+
	□

4. 在自然推理系统 $N_{\mathcal{L}}$ 中, 构造下列推理的证明:

每个喜欢步行的人都不喜欢骑自行车。每个人或者喜欢骑自行车或者喜欢乘汽车。有的人不喜欢乘汽车。
所以有的人不喜欢步行。

这里假定个体域为全体人类。

解答. 首先进行符号化, 令:

$$P(x) : x \text{ 喜欢步行}, Q(x) : x \text{ 喜欢骑自行车}, R(x) : x \text{ 喜欢乘汽车}$$

则上述推理可以转化为:

$$\{\forall x(P(x) \rightarrow \neg Q(x)), \forall x(Q(x) \vee R(x)), \exists x\neg R(x)\} \vdash \exists x\neg P(x)$$

证明过程如下:

(1) $\exists x\neg R(x)$	前提引入
(2) $\neg R(c)$	1, \exists_-
(3) $\forall x(Q(x) \vee R(x))$	前提引入
(4) $Q(c) \vee R(c)$	3, \forall_-
(5) $Q(c)$	2, 4 析取三段论
(6) $\forall x(P(x) \rightarrow \neg Q(x))$	前提引入
(7) $P(c) \rightarrow \neg Q(c)$	6, \forall_-
(8) $\neg P(c)$	5, 7 拒取
(9) $\exists x\neg P(x)$	8, \exists_+
	□