

第八周作业-Solution

Lecturer: 杨启哲

Last modified: 2024 年 10 月 31 日

1. 在自然推理系统 $N_{\mathcal{L}}$ 中, 构造下列推理的证明:

$$\{\forall x(F(x) \rightarrow \neg G(x)), \forall x(H(x) \rightarrow G(x))\} \vdash \forall x(H(x) \rightarrow \neg F(x))$$

解答. (1) $\forall x(H(x) \rightarrow G(x))$

前提引入

(2) $H(x) \rightarrow G(x)$

1, \forall_-

(3) $\forall x(F(x) \rightarrow \neg G(x))$

前提引入

(4) $F(x) \rightarrow \neg G(x)$

3, \forall_-

(5) $G(x) \rightarrow \neg F(x)$

4, 代换

(6) $H(x) \rightarrow \neg F(x)$

2, 5, 三段论

(7) $\forall x(H(x) \rightarrow \neg F(x))$

6, \forall_+

□

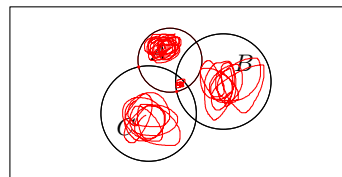
2. 这道题我们更好的理解一下对称差:

(1) 请画出 $A \oplus B \oplus C$ 的文氏图。

(2) 证明对称差具有结合律: $A \oplus (B \oplus C) = (A \oplus B) \oplus C$ 。

解答.

- 文氏图如下, 图中用红色涂鸦的部分即为 $A \oplus B \oplus C$:



$A \oplus B \oplus C$

- 注意到:

$$x \in A \oplus (B \oplus C) \Leftrightarrow (x \in A \setminus (B \oplus C)) \vee (x \in (B \oplus C) \setminus A)$$

$$\Leftrightarrow ((x \in A) \wedge (x \notin (B \oplus C))) \vee ((x \in (B \oplus C)) \wedge x \notin A)$$

$$\Leftrightarrow ((x \in A) \wedge ((x \in B \cap C) \vee x \notin B \cup C)) \vee ((x \in B \oplus C) \wedge x \notin A)$$

$$\Leftrightarrow (x \in A \cap B \cap C) \vee (x \in A \cap \overline{B \cup C}) \vee ((x \in B \oplus C) \wedge x \notin A)$$

$$\Leftrightarrow (x \in A \cap B \cap C) \vee (x \in A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \vee ((x \in B \cap \overline{C}) \vee (x \in \overline{B} \cap C)) \wedge x \in \overline{A}$$

$$\Leftrightarrow (x \in A \cap B \cap C) \vee (x \in A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \vee (x \in \overline{A} \cap B \cap \overline{C}) \vee (x \in \overline{A} \cap \overline{B} \cap C)$$

$$\Leftrightarrow (x \in A \oplus B) \oplus C$$

□

3. 求下列集合:

- $A = \{a, b, c\}$ 和 $B = \{a, 1, 2\}$ 的对称差 $A \oplus B$.
- $A = \{1, \{2, 3\}, \{1, \{2\}\}\}$ 的广义并集 $\cup A$.
- $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ 的幂集 $\mathcal{P}(A)$.

解答.

- $A \oplus B = \{b, c, 1, 2\}$.
- $\cup A = \{1, 2, 3, \{2\}\}$.
- $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$.

□

4. 对 62 个人的调查表明有 25 个人阅读《每周新闻》杂志, 26 个人阅读《时代》杂志, 26 个人阅读《财富》杂志, 9 个人阅读《每周新闻》和《财富》杂志, 11 个人阅读《每周新闻》和《时代》杂志, 8 个人阅读《时代》和《财富》杂志, 还有 8 个人什么杂志也不读。问:

- 有多少人只阅读《每周新闻》杂志?
- 有多少人每个杂志都阅读?

解答. 令有 x 个人三本杂志都读, 则由容斥原理不难得到:

$$62 - 8 = 25 + 26 + 26 - 9 - 11 - 8 + x$$

解得 $x = 5$, 因此:

- 有 $25 - 9 - 11 + 5 = 10$ 个人只阅读《每周新闻》杂志。
- 有 5 个人每个杂志都阅读。

□

5. 设 A, B, C 是任意集合, 证明:

- $A \cap (B \cup \bar{A}) = B \cap A$.
- $(A - B) - C = A - (B \cup C)$.

解答.

•

$$\begin{aligned} A \cap (B \cup \bar{A}) &= (A \cap B) \cup (A \cap \bar{A}) \\ &= (A \cap B) \cup \emptyset \\ &= A \cap B \end{aligned}$$

•

$$\begin{aligned}(A - B) - C &= (A \cap \bar{B}) - C \\ &= A \cap \bar{B} \cap \bar{C} \\ &= A \cap \overline{(B \cup C)} \\ &= A - (B \cup C)\end{aligned}$$

□