离散数学 Week 9

第九周作业-Solution

Lecturer: 杨启哲 Last modified: 2024 年 11 月 13 日

1. 列出集合:

$$A = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}$$

上的包含关系 R.

解答. 注意到:

$$\emptyset \subseteq \{\emptyset\} \subseteq \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \subseteq \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$$

将上述四个集合分别将其记为 E, F, G, H，我们有:

$$R = \{(E, E), (E, F), (E, G), (E, H), (F, F), (F, G), (F, H), (G, G), (G, H), (H, H)\}.$$

□

2. 令 $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 4)\}$，求 $R \circ R, R^{-1}, R \restriction \{0, 1\}, R[\{1, 2\}], R^3$.

解答. 由定义可知:

- $R \circ R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4)\}$.
- $R^{-1} = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (2, 2), (3, 2), (4, 3)\}$.
- $R \restriction \{0, 1\} = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3)\}$.
- $R[\{1, 2\}] = \{1, 2, 3\}$.
- $R^3 = R^2 \circ R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4)\}$.

□

3. 给定 $A = \{1, 2, 3, 4\}$ 和其上的关系 $R = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (3, 4)\}$，请问:

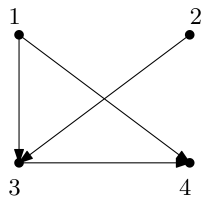
- R 的关系图和关系矩阵是怎么样的?
- R 满足什么关系?（自反、反自反、对称、反对称、传递？）
- 求 R 的自反闭包、传递闭包、对称闭包和自反对称传递闭包。

解答.

(1) 关系图和关系矩阵如图1所示:

(2) R 是反自反的、反对称的。

(3) R 的各类闭包如下:



$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

图 1: 关系图与关系矩阵

- $r(R) = R \cup R^0 = \{(1,3),(1,4),(2,3),(3,4),(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$.
- $s(R) = R \cup R^{-1} = \{(1,3),(1,4),(2,3),(3,4),(3,1),(4,1),(3,2),(4,3)\}$
- $t(R) = \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i = \{(1,3),(1,4),(2,3),(3,4),(2,4)\}$
- 其自反传递对称闭包为全关系：$tsr(R) = E_A$.

□

Remark 0.1

自反对称传递闭包不能通过 $str(R)$ 得到，因为该关系并不一定是传递的。

4. 设 R_1, R_2 是 A 上的关系，证明：

- $(R_1 \cup R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cup R_2^{-1}$.
- $(R_1 \cap R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cap R_2^{-1}$.

解答.

(1)

$$\begin{aligned} (x,y) \in (R_1 \cup R_2)^{-1} &\Leftrightarrow (y,x) \in R_1 \cup R_2 \\ &\Leftrightarrow (y,x) \in R_1 \vee (y,x) \in R_2 \\ &\Leftrightarrow (x,y) \in R_1^{-1} \vee (x,y) \in R_2^{-1} \\ &\Leftrightarrow (x,y) \in R_1^{-1} \cup R_2^{-1}. \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} (x,y) \in (R_1 \cap R_2)^{-1} &\Leftrightarrow (y,x) \in R_1 \cap R_2 \\ &\Leftrightarrow (y,x) \in R_1 \wedge (y,x) \in R_2 \\ &\Leftrightarrow (x,y) \in R_1^{-1} \wedge (x,y) \in R_2^{-1} \\ &\Leftrightarrow (x,y) \in R_1^{-1} \cap R_2^{-1}. \end{aligned}$$

□

5. 如果 A 上的关系 R 是自反的、对称的和传递的，则称其是 A 上的**等价关系**。对于给定的集合 A 和关系 R，判定 R 是否是 A 上的等价关系，并给出证明。

(1) $A = \{1,2,3\}, R = \{(x,y) \mid x+y \neq 3, x,y \in A\}$,

(2) $A = \mathscr{P}(S)$，这里 S 是一个超过两个元素的集合，$R = \{(X,Y) \mid X \subseteq Y, X, Y \in A\}$.

(3) $A = \mathscr{P}(S)$，这里 S 是一个超过两个元素的集合，$R = \{(X,Y) \mid X \subseteq Y \vee Y \subseteq X, X, Y \in A\}$.

解答.

(1) R 不是等价关系。因为 R 不是传递的，例如 $(1,3) \in R, (3,2) \in R$ 但是 $(1,2) \notin R$.

(2) R 不是等价关系。因为 R 不是对称的，考虑 S 中的真子集 X，有 $X \subseteq S$，但 $S \not\subseteq X$，从而 $(X,S) \in R$ 但 $(S,X) \notin R$。

(3) R 不是等价关系,因为 R 不是传递的,考虑 S 的两个不相交的真子集 X,Y,我们有 $(X,S),(S,Y) \in R$，但由选法 $(X,Y) \notin R$.

$\square$