

第十周作业

Lecturer: 杨启哲

Last modified: 2024 年 11 月 13 日

截止日期 2023 年 11 月 20 日晚 24: 00

1. 令 R 是集合 A 上的一个关系, 证明: $s(t(R)) \subseteq t(s(R))$.

2. 令 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, 在 $A \times A$ 上定义二元关系 R :

$$\forall (u, v), (x, y) \in A \times A, (u, v)R(x, y) \Rightarrow u + y = x + v$$

- 证明 R 是 $A \times A$ 上的等价关系。
- 确定相应的等价类, 以及对 $A \times A$ 的划分。

3. 设 π 是正整数集 \mathbb{Z}^+ 的子集族 $\pi = \{S_1, S_2, S_3\}$, 满足:

- $S_1 = \{1\}$;
- $S_2 = \{x \mid x \text{ 是质数}\}$;
- $S_3 = \{x \mid x \text{ 是合数}\}$ 。

(1) 证明 π 是 \mathbb{Z}^+ 的一个划分。

(2) 定义如下关系 R :

$$\forall x, y \in \mathbb{Z}^+, xRy \Rightarrow \exists S \in \pi, x, y \in S$$

证明 R 是 \mathbb{Z}^+ 上的等价关系。

(3) 写出商集 \mathbb{Z}^+/R 。

Remark 0.1

这个例子希望大家对等价关系和划分能有一个统一的理解。

4. 画出如下偏序集的 Hasse 图:

$$A = \{a, b, c, d, e, f\}, \quad R_{\leq} = \{(a, d), (a, c), (a, b), (a, e), (b, e), (c, e)\} \cup I_A$$

并指出 A 的极大元、极小元、最大元和最小元。

5. 设 (A, R) 是偏序集, 在 A 上定义新的关系 S 如下: $\forall x, y \in A, xSy \Leftrightarrow yRx$, 并称 S 为 R 的对偶关系。

(1) 证明: S 也是 A 上的偏序关系。

(2) 如果 R 是整数集合上的小于等于关系, 则 S 是什么关系? 如果 R 是正整数集合上的整除关系, 则 S 是什么关系?