

## 第十周作业

Lecturer: 杨启哲

Last modified: 2024 年 11 月 13 日

截止日期 2023 年 11 月 20 日晚 24: 00

1. 令  $R$  是集合  $A$  上的一个关系, 证明:  $s(t(R)) \subseteq t(s(R))$ .
2. 令  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ , 在  $A \times A$  上定义二元关系  $R$ :

$$\forall (u, v), (x, y) \in A \times A, (u, v)R(x, y) \Rightarrow u + y = x + v$$

- 证明  $R$  是  $A \times A$  上的等价关系。
  - 确定相应的等价类, 以及对  $A \times A$  的划分。
3. 设  $\pi$  是正整数集  $\mathbb{Z}^+$  的子集族  $\pi = \{S_1, S_2, S_3\}$ , 满足:

- $S_1 = \{1\}$ ;
- $S_2 = \{x \mid x \text{ 是质数}\}$ ;
- $S_3 = \{x \mid x \text{ 是合数}\}$ 。

- (1) 证明  $\pi$  是  $\mathbb{Z}^+$  的一个划分。
- (2) 定义如下关系  $R$ :

$$\forall x, y \in \mathbb{Z}^+, xRy \Rightarrow \exists S \in \pi, x, y \in S$$

证明  $R$  是  $\mathbb{Z}^+$  上的等价关系。

- (3) 写出商集  $\mathbb{Z}^+/R$ 。

## Remark 0.1

这个例子希望大家对等价关系和划分能有一个统一的理解。

4. 画出如下偏序集的 Hasse 图:

$$A = \{a, b, c, d, e, f\}, \quad R_{\leq} = \{(a, d), (a, c), (a, b), (a, e), (b, e), (c, e)\} \cup I_A$$

并指出  $A$  的极大元、极小元、最大元和最小元。

5. 设  $(A, R)$  是偏序集, 在  $A$  上定义新的关系  $S$  如下:  $\forall x, y \in A, xSy \Leftrightarrow yRx$ , 并称  $S$  为  $R$  的对偶关系。
  - (1) 证明:  $S$  也是  $A$  上的偏序关系。
  - (2) 如果  $R$  是整数集合上的小于等于关系, 则  $S$  是什么关系? 如果  $R$  是正整数集合上的整除关系, 则  $S$  是什么关系?