离散数学 Week 10

第十周作业-Solution

Lecturer: 杨启哲 Last modified: 2024 年 11 月 21 日

1. 令 R 是集合 A 上的一个关系，证明：$s(t(R)) \subseteq t(s(R))$.

解答. 注意到 $t(s(R))$ 也是对称的，这是因为：

$$\begin{aligned}&\forall(x,y)\in t(s(R)), \exists z_1\cdots z_k\in A,\ (x,z_1)\in s(R),\cdots,(z_k,y)\in s(R)\\ \Rightarrow&(z_k,x)\in s(R),\cdots,(y,z_1)\in s(R)\Rightarrow(y,x)\in t(s(R))\end{aligned}$$

从而：

$$R\subseteq s(R)\Rightarrow t(R)\subseteq t(s(R))\Rightarrow s(t(R))\subseteq s(t(s(R)))=t(s(R))$$

□

2. 令 $A=\{1,2,3,4\}$，在 $A\times A$ 上定义二元关系 R:

$$\forall(u,v),\ (x,y)\in A\times A, (u,v)R(x,y)\Rightarrow u+y=x+v$$

- 证明 R 是 $A\times A$ 上的等价关系。
- 确定相应的等价类，以及对 $A\times A$ 的划分。

解答.

(1) 要证明 R 是 $A\times A$ 上的等价关系，只要证明 R 满足自反性、对称性和传递性即可。

- 自反性：$\forall(x,y)\in A\times A,\ x+y=x+y\Rightarrow(x,y)R(x,y)$，因此 R 满足自反性。
- 对称性：$\forall(u,v),\ (x,y)\in A\times A,\ (u,v)R(x,y)\Rightarrow u+y=x+v\Rightarrow x+v=u+y\Rightarrow (x,y)R(u,v)$，因此 R 满足对称性。
- 传递性：$\forall(u,v),\ (x,y),\ (z,w)\in A\times A,\ (u,v)R(x,y)\wedge(x,y)R(z,w)\Rightarrow u+y=x+v\wedge x+y=z+w\Rightarrow u+y=z+w\Rightarrow(u,v)R(z,w)$，因此 R 满足传递性。

(2) $A\times A$ 的等价类如下：

(i) $E_1=[(1,1)]_R=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$
(ii) $E_2=[(1,2)]_R=\{(1,2),(2,3),(3,4)\}$
(iii) $E_3=[(1,3)]_R=\{(1,3),(2,4)\}$
(iv) $E_4=[(1,4)]_R=\{(1,4)\}$
(v) $E_5=[(2,1)]_R=\{(2,1),(3,2),(4,3)\}$
(vi) $E_6=[(3,1)]_R=\{(3,1),(4,2)\}$
(vii) $E_7=[(4,1)]_R=\{(4,1)\}$

从而对 $A \times A$ 的划分为：

$$\{E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6, E_7\}$$

□

3. 设 π 是正整数集 $\mathbb{Z}^+$ 的子集族 $\pi = \{S_1, S_2, S_3\}$，满足：

- $S_1 = \{1\}$;
- $S_2 = \{x \mid x\text{是质数}\}$;
- $S_3 = \{x \mid x\text{是合数}\}$。

(1) 证明 π 是 $\mathbb{Z}^+$ 的一个划分。

(2) 定义如下关系 R：

$$\forall x, y \in \mathbb{Z}^+,\ xRy \Rightarrow \exists S \in \pi,\ x, y \in S$$

证明 R 是 $\mathbb{Z}^+$ 上的等价关系。

(3) 写出商集 $\mathbb{Z}^+/R$。

Remark 0.1

这个例子希望大家对等价关系和划分能有一个统一的理解。

解答.

(1) 注意到 $S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \mathbb{Z}^+$，并且对于任意的 $i, j \in \{1, 2, 3\}$ 有：

$$S_i \cap S_j = \emptyset$$

从而 π 是 $\mathbb{Z}^+$ 的一个划分。

(2) 只需证明 R 满足自反性、对称性和传递性即可：

- 自反性：$\forall x \in \mathbb{Z}^+$，$\exists i\ x \in S_i \Rightarrow xRx$，因此 R 满足自反性。
- 对称性：$\forall x, y \in \mathbb{Z}^+$，$xRy \Rightarrow \exists i,\ x, y \in S_i \Rightarrow yRx$，因此 R 满足对称性。
- 传递性：$\forall x, y, z \in \mathbb{Z}^+$，$xRy \wedge yRz \Rightarrow \exists i, j,\ x, y \in S_i, y, z \in S_j \Rightarrow y \in S_i \cap S_j \Rightarrow i = j \Rightarrow x, z \in S_i \Rightarrow xRz$，因此 R 满足传递性。

Remark 0.2

这里传递性的证明用到了，在一个划分中，两个集合的交集要么为空，要么相等。

(3) $\mathbb{Z}^+/R = \{S_1, S_2, S_3\}$，即一个划分就刻画了该集合上的一种等价关系。

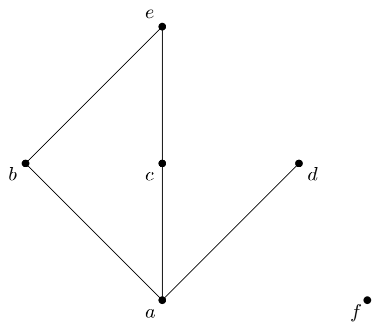
□

4. 画出如下偏序集的 Hasse 图：

$$A = \{a, b, c, d, e, f\}, \qquad R_{\leqslant} = \{(a, d), (a, c), (a, b), (a, e), (b, e), (c, e)\} \cup I_A$$

并指出 A 的极大元、极小元、最大元和最小元。

解答. 其 Hasse 图如下所示：



- 极小元：a, f
- 极大元：e, d, f
- 最小元：无
- 最大元：无

□

5. 设 (A, R) 是偏序集，在 A 上定义新的关系 S 如下：$\forall x, y \in A$，$xSy \Leftrightarrow yRx$，并称 S 为 R 的对偶关系。

(1) 证明：S 也是 A 上的偏序关系。

(2) 如果 R 是整数集合上的小于等于关系，则 S 是什么关系？如果 R 是正整数集合上的整除关系，则 S 是什么关系？

解答.

(1) 要证明 S 是 A 上的偏序关系，只要证明 S 满足自反性、反对称性和传递性即可。

- 自反性：$\forall x \in A$，$xRx \Rightarrow xSx$，因此 S 满足自反性。
- 反对称性：$\forall x, y \in A$，$xSy \wedge ySx \Rightarrow yRx \wedge xRy \Rightarrow x = y$，因此 S 满足反对称性。
- 传递性：$\forall x, y, z \in A$，$xSy \wedge ySz \Rightarrow yRx \wedge zRy \Rightarrow zRx \Rightarrow xSz$，因此 S 满足传递性。

(2) 如果 R 是整数集合上的小于等于关系，则 S 是整数集合上的大于等于关系。如果 R 是正整数集合上的整除关系，则 S 是正整数集合上的被整除关系。

□