Shanghai Normal University 上海师范大学

《离散数学》

1-命题逻辑 (I)(Proposition Logic(I))

杨启哲

上海师范大学信机学院计算机系

2024 年 9 月 15 日

数理逻辑前言

数理逻辑

逻辑，是对人类推理过程的研究。数理逻辑，则是通过用数学方法对人类推理过程作研究。而数学方法，其实就是使用符号体系对具体事物进行抽象的形式研究的方法。

亚里士多德的三段论逻辑

1. 所有人是必死的。
2. 苏格拉底是人。
3. 所以，苏格拉底会死。

1. 所有人是必死的。
2. 苏格拉底会死。
3. 所以，苏格拉底是人。

数理逻辑发展史

数理逻辑发展历史

- 数理逻辑前史时期-古典形式逻辑

  代表人物：亚里士多德

- 数理逻辑初创时期-逻辑代数时期

  代表人物：莱布尼茨

- 数理逻辑奠定时期

  代表人物：康托尔、希尔伯特、罗素

- 数理逻辑发展初期

  代表人物：哥德尔

- 数理逻辑现代发展时期

  从 20 世纪 40 年代开始，主要是非经典逻辑和四论（模型论、集合论、递归论和证明论）的发展。

命题逻辑

主要内容

- 命题的基本概念
- 命题联结词
- 命题公式

命题的基本概念

什么是命题

定义 1 **[命题].**

命题 (Proposition)，是一个可以判断真假的陈述句。

- 只有陈述句才能成为命题。
- 命题只有两个取值，真或假。该值被称为命题的真值（Truth Value），通常用大写字母 T / F 或者 1 / 0 表示。

命题举例

上海师范大学 Shanghai Normal University

下面哪些是命题?

1. 4 是素数。	命题,假
2. $\sqrt{5}$ 是无理数。	命题,真
3. 4 是素数或者 $\sqrt{5}$ 是无理数。	命题,真
4. $x > y$,其中 x, y 是任意的两个数。	不是命题
5. 火星上有水。	命题,真
6. 2050 年元旦是晴天。	命题,未知
7. π 大于 $\sqrt{2}$ 么?	不是命题
8. 请不要吸烟。	不是命题
9. 这朵花真美丽啊!	不是命题
10. 我正在说假话。	不是命题 (悖论)

命题分类

在上述的例子中，我们可以发现：

- 比如"4 是素数" 和" 火星上有水" 这两个命题已经不能被拆分成更小的命题。
- 而"4 是素数或者 $\sqrt{5}$ 是无理数" 可以被拆分成两个更小的命题，即"4 是素数"和"$\sqrt{5}$ 是无理数"，两者用"或者"连接。

根据能否被拆分成更小的命题，我们可以将命题分为两类：

命题分类

- **简单命题**：又称**原子命题**，指不能再被拆分的命题。
- **复合命题**：由多个简单命题由联结词连结而成的命题。

在命题逻辑中。我们不对命题的主语和谓语进行进一步拆分，而是将其作为一个整体进行看待，而在后面学到的谓词逻辑里，我们会对其进行进一步的分析。

命题的符号化表示

为了方便进行命题演算，采用数学方法将命题符号化是非常重要的。

用符号来表示命题

- 用小写字母 $p, q, r, s, \cdots$ 表示命题 (原子命题), 如在上述的例子中，可以用 p, q, r, s 分别表示:

  p: 4 是素数。 $q : \sqrt{5}$ 是无理数。

  r : 火星上有水。s : 2050 年元旦是晴天。

命题变元和命题常元

类比初高中数学学过的常量和变量，命题符号也分为两类:

- 表示具有确定真值的命题的符号（给定的原子命题），称为命题常元（命题常项）。
- 表示任意命题的符号，称为命题变元（命题变项）。

命题变元不是命题，因此没有确定的真值。但如同变量一样，我们可以将其赋值 0 或者 1，也可以将某个具体命题代入使其获得确定的真值。

命题的内容/形式?

- 命题只是一个取真或者取假的陈述句。
- 数理逻辑不关心内容。

  我们不关心陈述句的内容为什么是真或者为什么是假。
- 数理逻辑只关心形式。

  我们只关心命题可以被赋值为真或假，并且在赋值之后如何与其他的命题发生联系。

命题联结词

定义 2 **[联结词].**

联结词 (connective)，是用来将命题联结成新的复合命题的词语。

联结词

- 联结词相当于数学中的运算符号，如同 $+$, $-$, $\times$, $\div$ 等。
- 由联结词组成的新的复合命题的真值可以由组成它的命题的真值来确定。
- 自然语言中的联结词往往具有二义性，因此在数理逻辑中我们需要严格的定义相应的联结词。
- 常见的联结词：$\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$

否定联结词：$\neg$

定义 3 **[否定词 $\neg$].**

否定词 (negation) $\neg$ 是一个一元联结词，一个命题 p 加上否定词后形成了新的命题 $\neg p$，称为 p 的否定，也读作”非 p“。

$\neg p$ 的真值

$\neg p$ 为真当且仅当 p 为假，即如果为 p 为真，则 $\neg p$ 为假；如果 p 为假，则 $\neg p$ 为真。

例 4 **[否定命题的例子].**

- p：　今天是星期三。
- $\neg p$：今天不是星期三。

真值表

我们可以用真值表来表示联结词的真值情况。

真值表

- 真值表可以清楚的表示出命题之间的真值关系。
- 如右图，$\neg p$ 的真值表表明了 $\neg p$ 的真值如何依赖于 p 的真值。
- 真值表是命题逻辑里研究真值关系的重要工具。

p	$\neg p$
T	F
F	T

表：$\neg p$ 的真值表

定义 5 **[合取 $\wedge$].**

合取词 (conjunction) ”$\wedge$” 是一个两元联结词，两个命题 p 和 q 通过合取词联结后形成了新的命题 $p \wedge q$，称为 p 与 q 的合取，也读作”p 与 (并且)q“。

$p \wedge q$ 的真值

- $p \wedge q$ 为真当且仅当 p, q 都为真。
- $p \wedge q$ 的真值表：

p	q	$p \wedge q$
F	F	F
F	T	F
T	F	F
T	T	T

表：$p \wedge q$ 的真值表

例 6.

令 p, q, r, s 分别表示如下四个命题:

p : 张三用功。 q : 张三聪明。

r : 李四是好学生。 s : 王五是好学生。

则下列命题可以表示为:

- 张三既用功又聪明。 $p \wedge q$
- 张三不仅用功而且聪明。 $p \wedge q$
- 张三虽然聪明，但不用功。 $q \wedge \neg p$
- 李四和王五都是好学生。 $r \wedge s$

和日常用语的差异

“张三和李四是同学”中的”和“与合取词 ∧ 相同么?

不相同，如果将该命题符号化，则该命题将被视作一个原子命题。

事实上，自然用语中联结词与“合取词 ∧”并不等同，这是需注意的。

- 日常自然用语之间的”和“, ”与“, ”并且“一般表示有联系的事物，而”∧” 只关心命题之间的真假关系。
- ”∧” 无法表达一些语气，比如”苹果电脑质量很好, 但是很贵.“若令 p 为”苹果电脑质量好“，q 为” 苹果电脑价格贵”，则这句话的逻辑表达便为 $p \wedge q$。但是这样的表达并不能表达出”但是“的语气。

上海师范大学 Shanghai Normal University

定义 7 **[析取 $\vee$].**

析取词 (disjunction) ”$\vee$” 是一个两元联结词，两个命题 p 和 q 通过析取词联结后形成了新的命题 $p \vee q$，称为 p 与 q 的析取，也读作”p 或 q“。

$p \vee q$ 的真值

- $p \vee q$ 为真当且仅当 p, q 至少一个为真。
- $p \vee q$ 的真值表：

p	q	$p \vee q$
F	F	F
F	T	T
T	F	T
T	T	T

表：$p \vee q$ 的真值表

例 8.

令 p, q, r, s 分别表示如下四个命题：

p : 张三喜欢足球。 q : 张三喜欢篮球。

$r : 2 < 3$。 $s : 1 > 100$。

则下列命题可以如何表示？

- 张三喜欢足球或者篮球。 $p \vee q$
- $2 < 3$ 或者 $1 > 100$。 $r \vee s$

有趣的是，考察一下 $r \vee s$，尽管 $s : 1 > 100$ 为假，但是 $r \vee s$ 始终是真的。

Shanghai Normal University 上海师范大学

日常用语中的或

在自然语言中，”或“具有二义性：

- ”相容或“：如”张三或李四是好学生“，表示张三和李四中至少有一个是好学生，同时可能张三和李四都是好学生。
- ”排斥或“：如”张三是英国人或者美国人“，这里一般指张三只能是英国人或者美国人，不能同时是两者。

如果用 p, q 表示分别表示上述命题中的两个原子命题，则前者应当表示为$p \vee q$，后者应当表示为$(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$。

事实上，关于”排斥或“，我们可以用联结词异或 $\oplus$(exclusive OR) 来表示，即 $p \oplus q$ 表示 p, q 中有且仅有一个为真。

定义 9 **[蕴含 $\to$].**

蕴含词 (implication) ”$\to$” 是一个两元联结词，两个命题 p 和 q 通过蕴含词联结后形成了新的命题 $p \to q$，称为如果 p 则 q，也读作”p 蕴含 q“。其中,p 称为前件 (antecedent), q 称为后件 (consequent)。

$p \to q$ 的真值

- $p \to q$ 为假当且仅当 p 为真 q 为假。
- $p \to q$ 的真值表:
- 可以看到 $p \to q$ 与 $\neg p \vee q$ 的真值相同。

p	q	$p \to q$
F	F	T
F	T	T
T	F	F
T	T	T

表: $p \to q$ 的真值表

“→”最重要的作用是推理。

如果 $p \rightarrow q$ 为真，那么只要 p 为真，就可以推出 q 为真。

分离规则 (modus ponens)

$$
\begin{array}{cl}
p \rightarrow q & \because \text{若 } p \text{ 则 } q \\
p & \because p \\
\hline
q & \therefore q
\end{array}
$$

p 为假时 q 可以任取真假，从而 $p \rightarrow q$ 始终为真。

“$\to$”与日常用语的差异

上海师范大学 Shanghai Normal University

$\to$ 称为实质蕴含 (material implication)，与日常用语“如果...那么...”相比:

- 前后没有因果联系，只有前后的真值关系。
- 由定义，在 p 为假时，$p \to q$ 永远为真，即诸如“如果雪是黑的, 那么 1=2.”是个真命题!

例 10.

令 p, q 分别表示如下两个命题:

$$p : 3+3=6\ 。\qquad q: \text{雪是白的。}$$

则下列命题可以如何表示?

- 如果 $3+3=6$，那么雪是白的。 $p \to q$
- 如果 $3+3\neq 6$，那么雪不是白的。 $\neg p \to \neg q$
- 如果雪是白的, 那么 $3+3=6$。 $q \to p$
- 只有 $3+3=6$ 雪才是白色的。 $q \to p$

定义 11 **[等价 $\leftrightarrow$].**

等价词 (equivalence) ”$\leftrightarrow$” 是一个两元联结词，两个命题 p 和 q 通过等价词联结后形成了新的命题 $p \leftrightarrow q$，称为 p 等价 q，也读作”p 当且仅当 q“。

$p \leftrightarrow q$ 的真值

- $p \leftrightarrow q$ 为假当且仅当 p, q 真值相同。
- $p \leftrightarrow q$ 的真值表：
- 可以看到 $p \leftrightarrow q$ 与 $(p \to q) \wedge (q \to p)$ 的真值相同。

p	q	$p \leftrightarrow q$
F	F	T
F	T	F
T	F	F
T	T	T

表：$p \leftrightarrow q$ 的真值表

例 12.

令 p, q 分别表示如下两个命题:

$$p : \triangle ABC \text{ 是等腰三角形。} \qquad q : \triangle ABC \text{ 中有两个角相等。}$$

则下列命题可以表示成:

- $\triangle ABC$ 是等腰三角形当且仅当 $\triangle ABC$ 中有两个角相等。 $p \leftrightarrow q$

同样需要注意，与蕴含”$\to$” 相同，”$\leftrightarrow$” 只是真值之间的联系，并不意味着因果联系。

联结词总结

- 我们目前介绍了五个联结词: $\neg, \wedge, \vee, \to, \leftrightarrow$。
- 同样还可以定义其他的联结词，比如异或 ($\oplus$) 等。但是我们在后面可以证明，任何定义出的联结词都可以由这 5 个联结词进行表示，甚至我们只需要 $\neg$ 和 $\wedge$。便可以表达出所有的联结词。
- 联结词 $\neg, \wedge, \vee$ 对应着数字电路的门电路（非门，与门和或门），因此命题逻辑 (布尔逻辑) 也是数字电路分析和设计的理论基础和工具.

自然语言的符号化（形式化）总结

自然语句转换为逻辑语言

1. 首先引入一些命题符号 $p, q, \ldots$ 来表示其中出现的简单命题。
2. 通过合适的联结词将命题表达出来，形成表示自然语句的命题。

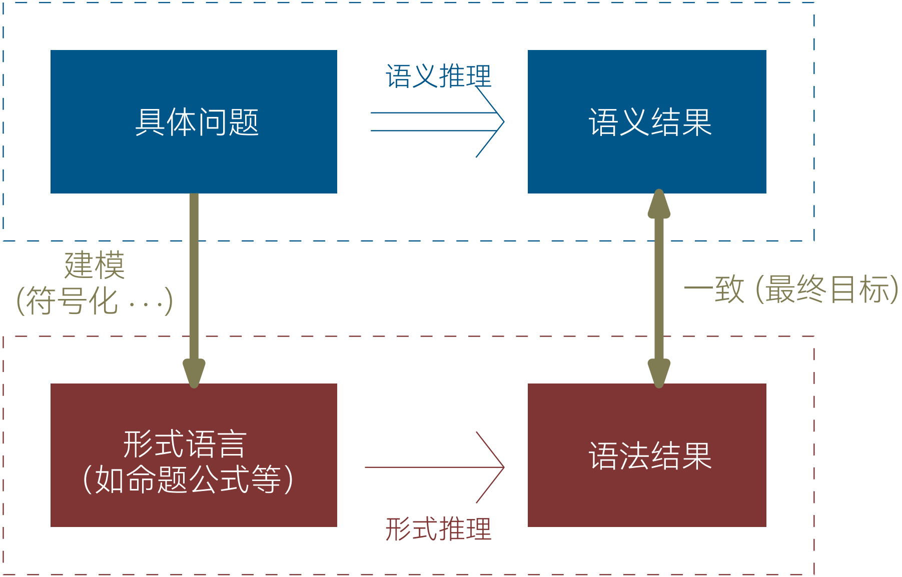
注意事项

要分清逻辑联结词与自然语言联结词的区别，比如自然语句中的“与”并不一定是逻辑中的“$\wedge$”，而“或”也可能是异或不一定是我们所定义的“$\vee$”。

如何确保转换是正确的?

检查真值!

关于形式化的一个不严谨的描述



命题公式

命题是命题逻辑讨论的对象，而通过联结词构造的复合命题，如何来确保其是有意义的?

由简单命题 p, q, r 组成的 $\neg p \wedge q \rightarrow r$ 的意义是否明确?

对于这个复合命题，究竟是先 $\neg p \wedge q$ 还是先 $q \rightarrow r$?

不同的顺序命题的真值会有很大的不同，比如在 p, q, r 都为真的情况下:

1. 如果采用前者，则整个命题为真。
2. 如果采用后者，则整个命题为假。

显然，我们需要对其定义运算的顺序，这个可以用括号来表示。

进一步，我们如何建立一个一般的原则以便生成所有的合法的命题，并能识别什么样的符号串是合法的（有意义的）?

上海师范大学 Shanghai Normal University

定义 13 **[命题公式].**

命题公式，又称合式公式(Well Formed Formula)，由下述条件递归定义给出：

1. 命题常量和命题变元是命题公式，其也被称为原子命题公式。
2. 如果 p, q 是命题公式，则 $(\neg p)$，$(p \wedge q)$，$(p \vee q)$，$(p \rightarrow q)$，$(p \leftrightarrow q)$ 也是命题公式。
3. 所有命题公式都可以通过有限次的上述规则得出。

补充说明

- 这里隐含了符号表是大小写字母 (可带下标)、联结词和圆括号的条件。
- 上述定义是一个归纳的构造性定义，其中第 $1, 2$ 条是奠基和归纳步骤, 第 3 条也并不是多余的一句话。
- 通过人为定义联结词优先级，可以省略一些括号，比如一般 $\neg p$ 会默认为 $(\neg p)$。

如何判断是否是一个命题公式

上海师范大学 Shanghai Normal University

判断方法

通过定义，层层规约至简单命题即可判断。

请判断下列符号串是否是合式公式？

1. $\neg(p \wedge q)$ 是
2. $(p \to (p \wedge q))$ 是
3. $(((p \to q) \wedge (q \to r)) \leftrightarrow (p \to r))$ 是
4. $\neg p \vee q \vee$ 不是
5. $(p \to q$ 不是
6. $((p \to q) \to (\wedge q))$ 不是

合式公式的层次定义

定义 14 **[合式公式的层次].**

一个合式公式的层次定义如下:

1. 若 p 是原子命题公式，则称 p 为 0 层公式。
2. 若 p 满足下列情况之一，则称 p 为 $n+1$ 层公式。
    - $p = \neg q$，q 是 n 层公式。
    - $p = q \wedge r$, 其中 q 是 i 层公式，r 是 j 层公式，并且 $n = \max(i, j)$.
    - $p = q \vee r$, 其中 q 是 i 层公式，r 是 j 层公式，并且 $n = \max(i, j)$.
    - $p = q \rightarrow r$, 其中 q 是 i 层公式，r 是 j 层公式，并且 $n = \max(i, j)$.
    - $p = q \leftrightarrow r$, 其中 q 是 i 层公式，r 是 j 层公式，并且 $n = \max(i, j)$.

例 15.

公式 $\neg(p \rightarrow q) \rightarrow (r \vee s)$ 为 3 层公式。

命题公式的解释 (真值)

给定一个命题公式 $(\neg p \wedge q) \to r$，其真值怎么确定?

- 命题公式的真值依赖于其构成的原子命题的真值。
- 当存在命题变元时，为了确定命题公式的真值，我们需要对其中的命题变量进行真值赋值。对其不同的赋值可能会使得公式具有不同的真值。

例 16.

在命题公式 $(\neg p \wedge q) \to r$ 中，如果我们令:

- p, q, r 均为真，则命题公式为真。
- p, r 为假，q 为真，则命题公式为假。

这样的一个赋值，称为真值赋值。

公式赋值

Shanghai Normal University

定义 17 **[赋值 (解释)].**

令 $p_1, \ldots, p_n$ 是出现在公式 A 中的全部命题变项，对于 $p_1, \ldots, p_n$ 的一组真值赋值称为对 A 的赋值 (解释)。若该赋值使得 A 为真，则称该赋值为 A 的**成真赋值**；若使得 A 为假，则称该赋值为 A 的**成假赋值**。

记号说明

- 如果 A 中出现的命题变量为 $p_1, \ldots, p_n$, 则 A 的赋值我们用一个 n 位的 01 串 $\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n$ 来表示，即 α_i 表示 p_i 的真值。
- 如果 A 中出现的命题变量为 $p, q, r, \ldots$(按字母顺序排列), 则 A 的赋值我们用一个 n 位的 01 串 $\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n$ 来表示，即 α_i 表示第 i 个字母所代表的命题变元的真值。

定义 18 **[真值表].**

对于命题公式 A, 将其所有可能的赋值情况列成表，这样的表称为 A 的真值表。

真值表的构造

1. 首先列出 A 中出现的全部命题变量 $p_1, \ldots, p_n$, 列出其所有可能的赋值情况。
   一共 2^n 种，可视作从二进制数 $(\underbrace{00\ldots0}_{n})_2)$ 枚举到 $(\underbrace{11\ldots1}_{n})_2$。
2. 按照从低到高的顺序写出公式的各个层次。
3. 对应各个赋值计算出各层次的真值，直到最后计算出公式的真值。

真值表的构造-例子 (I)

$(\neg p \wedge q) \to \neg r$ 的真值表

p	q	r	$\neg p$	$\neg r$	$\neg p \wedge q$	$(\neg p \wedge q) \to \neg r$
0	0	0	1	1	0	1
0	0	1	1	0	0	1
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	0	1	0
1	0	0	0	1	0	1
1	0	1	0	0	0	1
1	1	0	0	1	0	1
1	1	1	0	0	0	1

只有 011 为成假赋值，其余均为成真赋值。

真值表的构造-例子 (II)

上海师范大学 Shanghai Normal University

$\neg(p \to q) \land q \land r$ 的真值表

p	q	r	$p \to q$	$\neg(p \to q)$	$\neg(p \to q) \land q$	$\neg(p \to q) \land q \land r$
0	0	0	1	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0
1	0	0	0	1	0	0
1	0	1	0	1	0	0
1	1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	0	0	0

全部为成假赋值。

真值表的构造-例子 (III)

上海师范大学 Shanghai Normal University

$(p \wedge \neg p) \leftrightarrow (q \wedge \neg q)$ 的真值表

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \wedge \neg p$	$q \wedge \neg q$	$(p \wedge \neg p) \leftrightarrow (q \wedge \neg q)$
0	0	1	1	0	0	1
0	1	1	0	0	0	1
1	0	0	1	0	0	1
0	1	0	0	0	0	1

全部为成真赋值。

定义 19 **[重言式、可满足式、矛盾式].**

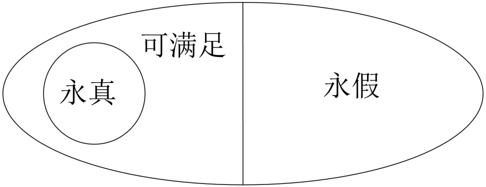
令 A 为任一命题公式。

- 若 A 在任一赋值下取值均为真，则称 A 为重言式 (tautology, 永真式).
- 若 A 在任一赋值下取值均为假，则称 A 为矛盾式 (contradiction, 永假式).
- 若存在一个赋值使得 A 取值为真，则称 A 为可满足式.

三类公式之间的关系

以下关系是显然的。

- A 永真 iff $\neg A$ 永假。
- A 可满足 iff $\neg A$ 不是永真式。
- A 永假 iff $\neg A$ 永真。
- A 非可满足 iff A 是永假式。



三种公式的关系示意图

如何确定命题公式的类型?

使用真值表!

代入规则

若 A 是一个重言式，B 是一个命题公式，若将 A 中的某个命题变元 p 全部用 B 替换形成一个新的公式 A'，则 A' 也是重言式。

例 20.

判断公式 $(R \vee S) \vee \neg(R \vee S)$ 和公式 $((R \vee S) \wedge ((R \vee S) \to (P \vee Q))) \to (P \vee Q)$ 是否为重言式?

两个公式都是重言式。

- 因为 $P \vee \neg P$ 为重言式，所以将 P 替换成 $R \vee S$ 后所得的公式依旧是重言式。
- 因为 $(A \wedge (A \to B)) \to B$ 是重言式，因此将 A 替换成 $R \vee S$, B 替换成 $P \vee Q$ 后所得的公式依旧是重言式。

一些例子

重言式

1. $p \vee \neg p$.
2. $(p \wedge q) \to p$.
3. $p \to (p \vee q)$

矛盾式

1. $p \wedge \neg p$.
2. $\neg(p \to q) \wedge q$.
3. $p \wedge (p \to q) \wedge \neg q$

可满足式

1. $p \to (p \wedge q \wedge r)$.
2. $(p \to q) \wedge (\neg(p \wedge r) \vee p)$.

总结

本章总结

- 命题的基本概念，什么是命题？简单命题和复合命题。
- 联结词的概念，与日常用语的区别。如何将一个复杂命题符号化。
- 命题公式的概念，如何判断一个符号串是否是命题公式。
- 命题公式的真值，真值表的概念。三种公式类型（重言式、可满足式、矛盾式）。