上海师范大学
Shanghai Normal University

《离散数学》

13-复习 (Review)

杨启哲

上海师范大学信机学院计算机系

2024 年 12 月 21 日

主要内容

上海师范大学 Shanghai Normal University

- 课程总结

- 考试内容

课程总结

《离散数学》究竟上了什么课？

上海师范大学 Shanghai Normal University

离散数学是研究离散对象的数学学科，是计算机学科的基础数学学科。

所学的内容

1. 数理逻辑。
2. 集合论。
3. 图论。
4. 组合计数。

数理逻辑是研究推理的内容。

- 命题逻辑
- 一阶逻辑

我们的关注内容:

- 用逻辑公式形式化命题。
- 逻辑公式的演算。
- 逻辑公式的推理。

命题逻辑

Shanghai Normal University 上海师范大学

- 命题逻辑的基本概念。
  - 命题与联结词的概念。
  - 命题逻辑研究的对象：命题公式。
  - 命题公式的真值。
- 命题逻辑的等值演算
  - 命题公式的等值演算。
  - 命题公式的范式：析取范式和合取范式，主合取范式与主析取范式。
  - 联结词的完备集。
  - 命题公式的可满足性—SAT 问题。
- 命题逻辑的推理
  - 自然推理系统 P。

一阶逻辑

- 一阶逻辑的基本概念。
  - 命题逻辑的局限性，量词的引入。
  - 一阶逻辑的研究对象：一阶逻辑公式。
  - 一阶逻辑公式的解释及其真值。
- 一阶逻辑的等值演算
  - 一阶逻辑公式的等值演算。
  - 一阶公式的范式-前束范式。
- 一阶逻辑公式的推理
  - 自然推理系统 $P_{\mathcal{L}}$，量词的推理规则。

集合论是研究集合的内容，也是数学的基本语言。

- 集合。
  - 集合的基本概念。（朴素集合论）
  - 集合的运算，有穷集的计数，容斥原理。
  - 朴素集合论的缺陷。
- 关系。
  - 关系的基本概念，有序二元组组成的集合。
  - 关系的性质及运算，关系的闭包。
  - 两种特殊的关系：等价关系与偏序关系。
- 函数。
  - 函数的基本概念，特殊的关系，单射/满射/双射。
  - 函数的性质及运算，复合和逆运算。
  - 集合的基数，比较无穷集合的大小。

图论

图论是一个重要的离散对象，对研究事物及其之间的关系起到了重要的作用。

- 图的基本概念。
  - 无向图与有向图。
  - 图上的基本信息，如顶点的度数，度数列；图的运算，子图，增删操作；图的同构。
  - 图的代数表示：邻接矩阵、关系矩阵和邻接表
- 图的连通性
  - 两个点之间的路径，简单通路（回路）、初级通路（回路）。
  - 图的连通性，无向图连通性的衡量，有向图不同的连通概念（强连通、弱连通、单向连通）
  - 特殊的路，欧拉通路（回路）与哈密顿通路（回路）
- 特殊的图–树
  - 树的不同等价定义，最小连通性的图，最大连通无回路的图。
  - Cayley 公式
  - 生成树的计算，Prim 算法与 Kruskal 算法。
  - 最优二叉树的计算，即 Huffman 树。

组合计数基础

计数问题也是计算机科学中重要问题，其可以回答枚举的可能性。

- 计数的基本方法
  - 计数的基本原理，加法原理等。
- 组合数
  - 组合数的实际意义。
  - 组合恒等式，证明方法，二项式定理。
  - 组合数与阶乘的估计
- 生成函数
  - 组合数的推广、生成函数的基本概念。
  - 利用生成函数计数。
  - Catlan 数。

考试内容

考试概况

考试安排

- 考试地点：**奉贤 2 教楼 221**
- 考试时间：**2025 年 1 月 3 日 (周五) 13:30-15:00**，共 90 分钟。

试卷构成

$$试卷 = 20\text{ 分填空题 } + 20\text{ 分选择题 } + 30\text{ 分综合题 } + 30\text{ 分证明题}$$

- 填空题一共 10 道，每道 2 分，共 20 分。
- 选择题一共 10 道，每道 2 分，共 20 分。
- 综合题一共 3 道，每道 10 分，共 30 分。
- 综合题一共 3 道，每道 10 分，共 30 分。

问题 1.

1. 谓词公式 $(\forall x)(P(x) \to Q(y)) \vee Q(x, y)$ 中量词 $\forall x$ 的辖域为 ______.
2. 已知命题公式 $A(x, y, z)$ 的主析取范式为 $m_1 \vee m_4 \vee m_6$，则该公式的主合取范式为 ______.
3. 令 F 是 $A = \{1, 2, 3\}$ 上的二元关系，$F = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (1, 3)\}$，则 F 的对称闭包是 ______。
4. n 阶完全图的边数为 ______。
5. 方程 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$ 的正整数解个数为 ______。

解 2.

1. $P(x) \to Q(y)$ 2. $M_0 \wedge M_2 \wedge M_3 \wedge M_5 \wedge M_7$ 3. $s(F) = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (1, 3), (3, 1)\}$
4. $n(n-1)/2$ 5. $\binom{20}{3}$.

问题 3.

1. 令 $F(x)$ 表示 x 是有理数，$G(x)$ 表示 x 是实数，则命题”所有的有理数都是实数，但有的实数不是有理数”的符号化为 (　)
   (A) $\forall x(F(x) \wedge G(x)) \wedge \exists x(G(x) \rightarrow \neg F(x))$　(B) $\forall x(F(x) \wedge G(x)) \wedge \exists x(G(x) \wedge \neg F(x))$
   (C) $\forall x(F(x) \rightarrow G(x)) \wedge \exists x(G(x) \wedge \neg F(x))$　(D) $\forall x(F(x) \rightarrow G(x)) \wedge \exists x(G(x) \rightarrow \neg F(x))$
2. 下列序列中，可构成无向简单图的结点度序列的是 (　)
   (A) $(1, 2, 3, 4)$　(B) $(2, 3, 1, 2)$　(C) $(1, 2, 2, 2)$　(D) $(1, 1, 3, 3)$
3. 下列说法错误的是 (　)
   (A) n 个结点的树有 $n-1$ 条边　(B) n 个结点的连通图至少有 $n-1$ 条边
   (C) 奇数个顶点的二分图没有哈密顿回路。　(D) 无向连通带权重图的最小生成树唯一
4. 下列集合中跟有理数集合等势的是 (　)
   (A) 平面直角坐标系上所有点的集合　(B) 整数集合　(C) $[0, 1]$　(D) 实数集合

解 4.

1. C　2. B　3. D　4. B

问题 5.

1. 用等值演算的方式证明：$(p \vee q) \to r \Leftrightarrow (p \to r) \wedge (q \to r)$
2. 用任何一种方式给出下列推理的证明：
   $\forall x(P(x) \to Q(x)), \forall x(Q(x) \to R(x)) \vdash \forall x(P(x) \to R(x))$;

上海师范大学 Shanghai Normal University

解 6.

1. 由基本等值式可得:

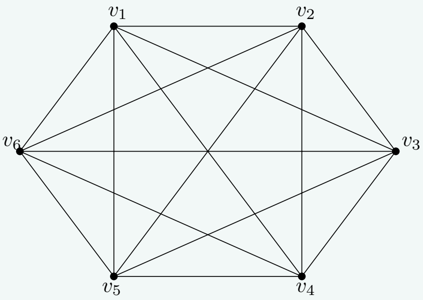
$$
\begin{aligned}
(p \vee q) \to r &\Leftrightarrow \neg(p \vee q) \vee r && \text{(蕴含等值式)} \\
&\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \vee r && \text{(德摩根律)} \\
&\Leftrightarrow (\neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee r) && \text{(分配律)} \\
&\Leftrightarrow (p \to r) \wedge (q \to r) && \text{(蕴含等值式)}
\end{aligned}
$$

2. 证明如下:

2.1	$\forall x(P(x) \to Q(x))$	前提引入
2.2	$P(x) \to Q(x)$	$\forall_-$
2.3	$\forall x(Q(x) \to R(x))$	前提引入
2.4	$Q(x) \to R(x)$	$\forall_-$
2.5	$P(x) \to R(x)$	$p \to q,\ q \to r \Rightarrow p \to r$
2.6	$\forall x(P(x) \to R(x))$	$\forall_+$

问题 7.

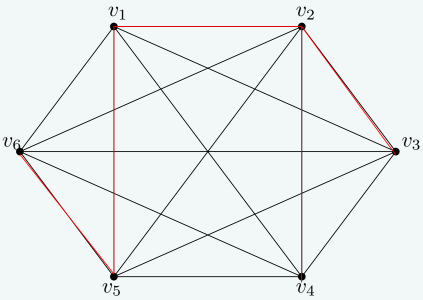
现有 $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$ 共六村子需要修路，村子间修路的成本见下图，单位是万元现要求 v_1 和 v_2 间必修一条直达路，v_5 和 v_6 间也需要修一条直达路。请找一个满足上面要求，而且保证六个村子间连通的成本最小的修路方案，并计算出最小的修路成本。



$cost(v_1,v_2)=14$	$cost(v_2,v_3)=10$	$cost(v_3,v_5)=12$
$cost(v_1,v_3)=13$	$cost(v_2,v_4)=9$	$cost(v_3,v_6)=18$
$cost(v_1,v_4)=15$	$cost(v_2,v_5)=14$	$cost(v_4,v_5)=10$
$cost(v_1,v_5)=10$	$cost(v_2,v_6)=19$	$cost(v_4,v_6)=15$
$cost(v_1,v_6)=12$	$cost(v_3,v_4)=80$	$cost(v_5,v_6)=80$

解 8.

其实就是要求包含 $(v_1, v_2), (v_5, v_6)$ 的最小生成树。



$cost(v_1, v_2) = 14$	$cost(v_2, v_3) = 10$	$cost(v_3, v_5) = 12$
$cost(v_1, v_3) = 13$	$cost(v_2, v_4) = 9$	$cost(v_3, v_6) = 18$
$cost(v_1, v_4) = 15$	$cost(v_2, v_5) = 14$	$cost(v_4, v_5) = 10$
$cost(v_1, v_5) = 10$	$cost(v_2, v_6) = 19$	$cost(v_4, v_6) = 15$
$cost(v_1, v_6) = 12$	$cost(v_3, v_4) = 80$	$cost(v_5, v_6) = 80$

最小成本为: $9 + 10 + 10 + 14 + 80 = 123.$

问题 9.

设 $G=(V,E)$ 是非平凡的无向图，满足 $|V|=n$，$|E|=m$。证明如果 $m\geqslant n$，则 G 中一定有圈。

证明. 我们对 n 进行归纳,$n=1$ 时由于只有自环，命题成立。

假设命题对 $\leqslant n-1$ 个点的图 G 均成立，考察 $|V|=n$ 的情况。我们可以不妨假设 G 是连通的，否则存在一个连通分支 (V',E') 满足 $|V'|<n,|E'|>|V'|$，从而由归纳假设其存在一个圈。现在考虑 G 中的一条边 (u,v):

- (u,v) 不是割边，即去除 (u,v) 后还存在一条 u 到 v 的路径 π，则 $(u,v)\pi$ 是一个圈。
- (u,v) 是割边，则删去 (u,v) 后图 G 被分解成两个连通分支，注意到其一定存在一个连通分支 (V',E') 满足 $|V'|<n,|E'|>|V'|$，从而由归纳假设其存在一个圈。

从而命题对 n 也成立。 □

上海师范大学 Shanghai Normal University

问题 10.

证明如下组合恒等式:

- $\sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} = n(n+1)2^{n-2}$
- $\binom{n}{k} - \binom{n-3}{k} = \binom{n-3}{k-1} + \binom{n-2}{k-1} + \binom{n-1}{k-1}$

证明.

- 注意到 $(1+x)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^n$，对其求两次导可得:

$$n(1+x)^{n-1} = \sum_{i=0}^{n} i \binom{n}{i} x^{i-1}, \quad n(n-1)(1+x)^{n-2} = \sum_{i=0}^{n} i(i-1) \binom{n}{i} x^{i-2}$$

令 $x=1$ 即可得到等式左边的两个式子，而右边的式子为 $n(n+1)2^{n-2}$，从而两边相等。

□

证明题举例 (II)

证明续.

- 我们用一个组合的方式来证明：考察一个大小为 n 的集合 A，其中有三个特殊元素 a, b, c，考察所有包含 a, b, c 至少一个元素的取法：
  - 该取法个数相当于所有 k 个元素的取法减去不包含 a, b, c 的取法，即 $\binom{n}{k} - \binom{n-3}{k}$。
  - 该取法也可以分成如下三类：
    1. 包含 a_1，一共有 $\binom{n-1}{k-1}$ 种取法。
    2. 不包含 a_1，但包含 a_2, 一共有 $\binom{n-2}{k-1}$ 种取法。
    3. 不包含 a_1, a_2，但包含 a_3，一共有 $\binom{n-3}{k-1}$ 种取法。

  从而我们有：

$$\binom{n}{k} - \binom{n-3}{k} = \binom{n-3}{k-1} + \binom{n-2}{k-1} + \binom{n-1}{k-1}$$

$\square$

一个完课的调查

最后，这是关于这门课完课的一个调查问卷，希望同学们可以积极参与，表达大家的想法和建议，你们的意见能够帮助我更好的改进这门课程。谢谢！

- 《离散数学》完课调查
- 问卷的二维码：

24秋《离散数学》完课反馈

长按识别二维码

祝大家考试顺利！提前祝大家新年快乐！