上海师范大学 Shanghai Normal University

《离散数学》

2-命题逻辑 (II)(Proposition Logic(II))

杨启哲

上海师范大学信机学院计算机系

2024 年 9 月 23 日

上节回顾

- 命题与命题联结词。
  - 命题的基本概念，什么是命题？简单命题和复合命题。
  - 联结词的概念，与日常用语的区别。如何将一个复杂命题符号化。

- 命题公式。
  - 命题公式的概念，如何判断一个符号串是否是命题公式。
  - 命题公式的真值，真值表的概念。三种公式类型（重言式、可满足式、矛盾式）。

主要内容

- 等值演算
- 联结词的完备集
- 命题公式的范式
- 可满足性问题

等値演算

什么是”等值”?

- 在初等数学中，当我们进行一些代数式运算时，我们经常会使用一些等式，如:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$
$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$$
$$\cdots$$

在命题逻辑里，我们也可以建立同样的等值式，去进行相应的运算。

等值式

回顾相等的定义，我们知道，两个数 a 和 b 相等，当且仅当 a 和 b 的值相同。

定义 1 **[等值式].**

设 A 和 B 是两个命题公式，若对于任何一个赋值，A 和 B 的真值都相同，则称 A 和 B 是等值的 (或等价的)，记作 $A \Leftrightarrow B(A = B)$。

例 2.

对于公式 $a \to b$ 和 $\neg a \vee b$ 来说，尽管他们的形式是不一样的 (**语法**上不同)，但对于任何一个关于 a, b 的赋值来说，他们的真值是相同的 (即真值表相同)，所以这两个公式是等值的 (**语义**上相同).

等值式的证明

通过真值表我们可以很容易的证明两个命题公式是等值的。

证明 $\neg(p \vee q)$ 和 $\neg p \wedge \neg q$ 等值

只需要验证两个公式的真值相同即可。

p	q	$\neg(p \vee q)$	$\neg p \wedge \neg q$
0	0	1	1
0	1	0	0
1	0	0	0
0	1	0	0

关于等值式

A 和 B 拥有不同的变元可以么?

完全可以! 事实上，假设 A 的变元集合为 P_1,B 的变元集合为 P_2, 我们可以假设 A, B 都是在变元集合 $P_1 \cup P_2$ 上的命题公式，一个不存在在 A 中但存在在 $P_1 \cup P_2$ 的命题变元可以视作 A 的哑元，即无论其真或者假，都不会影响 A 的真值。

关于等值式

$\leftrightarrow$ 与 $\Leftrightarrow$ 的区别?

尽管 $A \leftrightarrow B$ 和 $A \Leftrightarrow B$ 都蕴含了些 A 和 B 等价的意思，但两者式完全不同的概念。

- 从真假性来看，$A \leftrightarrow B$ 只有是重言式时，才能说明 A 和 B 等值。而 $A \Leftrightarrow B$ 已经表明 A 和 B 等值。
- 从形式角度看，$A \leftrightarrow B$ 是一个命题公式，而 $A \Leftrightarrow B$ 不是，它反映的是一种命题公式上的等价关系。

定理 3 **[等值定理].**

$A \Leftrightarrow B$ 当且仅当公式 $A \leftrightarrow B$ 是重言式。

等值关系

和数学中”=“的性质一样，等值关系具有如下三种性质:

1. 自反性 (reflexivity)，即对于任何命题公式 A, $A \Leftrightarrow A$.
2. 对称性 (symmetry)，即对于任何命题公式 A, B, 若 $A \Leftrightarrow B$, 则 $B \Leftrightarrow A$.
3. 传递性 (transitivity)，即对于任何命题公式 A, B, C, 若 $A \Leftrightarrow B$ 且 $B \Leftrightarrow C$, 则 $A \Leftrightarrow C$.

一般来说，满足这三个性质的关系被称为等价关系，其描绘了两者是” 等同的”。

等值证明的方法

在前面的例子中，我们已经展示了真值表技术可以用来证明两个公式等值，但是否存在其他方法呢?

利用基本等值式进行等值演算: 利用等值定理，我们可以构造一些相应的等值式，然后利用这些等值式进行等值演算。

基本等值公式 (I)

等值公式

1. 双重否定律:

$$\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$$

2. 幂等律:

$$A \vee A \Leftrightarrow A,\ A \wedge A \Leftrightarrow A$$

$$A \to A \Leftrightarrow 1,\ A \leftrightarrow A \Leftrightarrow 1$$

3. 交换律:

$$A \vee B \Leftrightarrow B \vee A,\ A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A,\ A \leftrightarrow B \Leftrightarrow B \leftrightarrow A$$

4. 结合律:

$$A \vee (B \vee C) \Leftrightarrow (A \vee B) \vee C$$

$$A \wedge (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \wedge C$$

$$A \leftrightarrow (B \leftrightarrow C) \Leftrightarrow (A \leftrightarrow B) \leftrightarrow C$$

基本等值公式 (II)

等值公式

5. 分配律:

$$A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$

$$A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$

$$A \to (B \to C) \Leftrightarrow (A \to B) \to (A \to C)$$

6. 德摩根律:

$$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B,\ \neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$$

$$\neg(A \to B) \Leftrightarrow A \wedge \neg B,\ \neg(A \leftrightarrow B) \Leftrightarrow A \leftrightarrow \neg B \Leftrightarrow \neg A \leftrightarrow B$$

7. 吸收律:

$$A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow A,\ A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow A$$

基本等值公式 (III)

等值公式

8. 零律:

$$A \vee 1 \Leftrightarrow 1,\ A \wedge 0 \Leftrightarrow 0$$

$$A \to 1 \Leftrightarrow 1,\ 0 \to A \Leftrightarrow 1$$

9. 同一律:

$$A \vee 0 \Leftrightarrow A,\ A \wedge 1 \Leftrightarrow A,\ 1 \to A \Leftrightarrow A$$

$$1 \leftrightarrow A \Leftrightarrow A,\ A \to 0 \Leftrightarrow \neg A,\ 0 \leftrightarrow A \Leftrightarrow \neg A$$

10. 补余律 (排中律、矛盾律)

$$A \vee \neg A \Leftrightarrow 1,\ A \wedge \neg A \Leftrightarrow 0$$

$$A \to \neg A \Leftrightarrow \neg A,\ A \leftrightarrow \neg A \Leftrightarrow 0$$

基本等值公式 (IV)

等值公式

11. 蕴含等值式：

$$A \to B \Leftrightarrow \neg A \vee B$$

通常在运算中，$\neg A \vee B$ 要比 $A \to B$ 方便。

12. 等价等值式：

$$A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \to B) \wedge (B \to A)$$

这表明等价关系可以用双蕴含词来表达，符合两个符号形式上的联系。

13. 假言易位：

$$(A \to B) \leftrightarrow (\neg B \to \neg A)$$

这阐述的就像高中所说的“原命题和逆否命题等价”。

基本等值公式 (V)

等值公式

14. 等价否定等值式：

$$A \leftrightarrow B \Leftrightarrow \neg A \leftrightarrow \neg B$$

直观上说，如果 A，B 是等价的，那么他们的否定也是等价的。

15. 归谬论：

$$(A \to B) \wedge (A \to \neg B) \Leftrightarrow \neg A$$

这个直观上理解就是反证法。

更多的等值公式

更多的等值公式

- $A \to (B \to C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \to C$ (前提合并)
- $A \to (B \to C) \Leftrightarrow B \to (A \to C)$(前提交换)
  请注意：$A \to (B \to C) \neq (A \to B) \to C$!
- $A \leftrightarrow B = (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B) \Leftrightarrow (A \vee \neg B) \wedge (\neg A \vee B)$(取值描述)
- $(A \to C) \wedge (B \to C) \Leftrightarrow (A \vee B) \to C$(蕴含合并)

置换规则

置换规则

令 $\Phi(A)$ 是一个包含 A 的命题公式，其中 A 是任意一个命题公式，$\Phi(B)$ 是将 $\Phi(A)$ 中的一些 A 替换成公式 B 后得到的公式, 则有：

$$若A \Leftrightarrow B, 则\Phi(A) \Leftrightarrow \Phi(B)$$

回顾：代入规则

若 A 是一个重言式，B 是一个命题公式，若将 A 中的某个命题变元 p 全部用 B 替换形成一个新的公式 A'，则 A' 也是重言式。

代入规则与置换规则的区别

- 置换规则是将其中一个公式中的某个子公式替换成另一个公式，而代入规则是将其中一个公式中的某个命题变元替换成另一个公式。
- 置换规则说明了替换某个子公式的等值式不会改变公式的真值，从而可以进行等值式的证明。代入规则则是对重言式的证明。
- 置换不需要全部换掉，可以只替换其中一部分。

等值演算

利用等值定律, 基本等值式以及替换规则进行公式推演。

等值演算的一般方法

一般是将 $\Leftrightarrow$ 两边的公式推演成相同形状的公式, 从而证明等值式成立.

- 尽可能的减少出现联结词的种类。
- 将否定联结词移到命题变元上。
- 可以转换成相应的范式。(后续内容)

等值演算的例子 (I)

上海师范大学 Shanghai Normal University

证明：$(p \vee q) \to r \Leftrightarrow (p \to r) \wedge (q \to r)$

证明. 由基本等值式可得：

$$
\begin{aligned}
(p \vee q) \to r &\Leftrightarrow \neg(p \vee q) \vee r && \text{(蕴含等值式)} \\
&\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \vee r && \text{(德摩根律)} \\
&\Leftrightarrow (\neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee r) && \text{(分配律)} \\
&\Leftrightarrow (p \to r) \wedge (q \to r) && \text{(蕴含等值式)}
\end{aligned}
$$

□

也可以从右边开始进行推导

等值演算的例子 (II)

上海师范大学 Shanghai Normal University

用等值演算判断下列公式的类型

1. $(P \to Q) \wedge P \to Q$.
2. $\neg(P \to (P \vee Q)) \vee R$.
3. $P \wedge (((P \vee Q) \wedge \neg P) \to Q)$.

证明. 只给出第一个的演算过程:

$$
\begin{aligned}
(P \to Q) \wedge P \to Q &\Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \wedge P \to Q && \text{(蕴含等值式)} \\
&\Leftrightarrow ((\neg P \wedge P) \vee (Q \wedge P)) \to Q && \text{(分配律)} \\
&\Leftrightarrow (0 \vee (Q \wedge P)) \to Q && \text{(取补律)} \\
&\Leftrightarrow (Q \wedge P) \to Q && \text{(同一律)} \\
&\Leftrightarrow \neg(Q \wedge P) \vee Q && \text{(蕴含等值式)} \\
&\Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q \vee Q && \text{(德摩根律，结合律)} \\
&\Leftrightarrow 1 && \text{(同一律)}
\end{aligned}
$$

对偶式与内否式

我们介绍一些可以简化等值公式讨论的技术，假设下面提到的公式仅使用了 $\neg$, $\wedge$, $\vee$ 这三个联结词。

定义 4 **[对偶式].**

令 A 式任一命题公式，将其中的 $\wedge, \vee$, 1, 0 分别用 $\vee$, $\wedge$, 0, 1 代替形成的新公式称为 A 的对偶式，记作 A^*。

定义 5 **[内否式].**

令 A 式任一命题公式，将其中所有肯定形式出现的变元 x 换成 $\neg x$、所有否定形式出现的变元 $\neg x$ 换成 x 后形成的新公式称为 A 的内否式，记作 A^-。

例子

令 $A \stackrel{\mathbf{def}}{=} (\neg P \vee (Q \wedge R)) \wedge 1$，则有：

1. $A^* = (\neg P \wedge (Q \vee R)) \vee 0$.
2. $A^- = (P \vee (\neg Q \wedge \neg R)) \wedge 1$.
3. $(A^*)^- = (P \wedge (\neg Q \vee \neg R)) \vee 0$
4. $(A^-)^* = (P \wedge (\neg Q \vee \neg R)) \vee 0$

对偶式的一些性质定理 (I)

上海师范大学 Shanghai Normal University

定理 6.

令 A 是任一只包含 $\neg, \wedge, \vee$ 的命题公式，则有：

1. $(A^*)^* \Leftrightarrow A$, $(A^-)^- \Leftrightarrow A$.
2. $(A \vee B)^* \Leftrightarrow A^* \wedge B^*$, $(A \vee B)^- \Leftrightarrow A^- \vee B^-$.
3. $(A \wedge B)^* \Leftrightarrow A^* \vee B^*$, $(A \wedge B)^- \Leftrightarrow A^- \wedge B^-$.
4. $(\neg A)^* \Leftrightarrow \neg(A^*)$, $(\neg A)^- \Leftrightarrow \neg(A^-)$ (作为作业请大家尝试一下)
5. $\neg A \Leftrightarrow (A^*)^-$. (德摩根律一般形式)
6. $(A^*)^- \Leftrightarrow (A^-)^*$.

$\neg A \Leftrightarrow (A^*)^-$ 的证明

上海师范大学 Shanghai Normal University

证明. 对 A 中出现的联结词个数作归纳法证明。

BASE: $n = 0$，即 A 没有联结词，从而 $A = p$，从而 $\neg A = \neg p$，$(A^*)^- = \neg p$，定理成立。

INDUCTION: 假设 $n \leqslant k$ 时命题成立，则 $n = k + 1$ 时，A 中至少有一个联结词，有如下三种情形：

1. $A = \neg A_1$，A_1 的联结词个数 $\leqslant k$。由归纳假设 $\neg A_1 \Leftrightarrow (A_1^*)^-$ 因此：

$$\neg A \Leftrightarrow \neg(\neg A_1) \Leftrightarrow \neg((A_1^*)^-) \Leftrightarrow (\neg A_1^*)^- \Leftrightarrow (A^*)^-$$

2. $A = A_1 \vee A_2$，A_1, A_2 的联结词个数 $\leqslant k$。由归纳假设：

$$\neg A \Leftrightarrow \neg(A_1 \vee A_2) \Leftrightarrow \neg A_1 \wedge \neg A_2 \Leftrightarrow (A_1^*)^- \wedge (A_2^*)^- \Leftrightarrow ((A_1 \vee A_2)^*)^- \Leftrightarrow (A^*)^-$$

3. $A = A_1 \wedge A_2$，与上一种情况相同。

□

对偶式的一些性质定理 (II)

上海师范大学 Shanghai Normal University

定理 7.

令 A 是任一只包含 $\neg, \wedge, \vee$ 的命题公式，则有：

1. A 与 A^- 同永真，同可满足。
2. $\neg A$ 与 A^* 同永真，同可满足。

推论 8.

若 $A \Leftrightarrow B$, 则有 $A^* \Leftrightarrow B^*$。

推论8的证明

证明.

1. $A \Leftrightarrow B$ 等价于公式 $A \leftrightarrow B$ 永真，也等价于 $\neg A \leftrightarrow \neg B$ 永真。
2. $\neg A \Leftrightarrow (A^*)^-$, $\neg B \Leftrightarrow (B^*)^-$
3. 公式 $(A^*)^- \leftrightarrow (B^*)^-$ 永真
4. 公式 $((A^*)^- \leftrightarrow (B^*)^-)^-$ 永真，即公式 $A^* \leftrightarrow B^*$ 永真，$A^* \Leftrightarrow B^*$。

□

等值演算总结

等值演算

- 等值式的概念、等值定理。
- 等值关系 ($\Leftrightarrow$), $\Leftrightarrow$ 与 $\leftrightarrow$ 的区别。
- 等值证明的方法: 真值表技术、等值演算。
  1. 基本等值式。
  2. 替换规则（与代入规则的不同）
  3. 一些技巧-对偶式与内否式。

联结词的完备集

命题公式与真值表关系

由命题公式写真值表是非常容易的，但是反过来呢?

考察我们之前描述“异或”的概念时，用了如下的表达式:

$$\mathrm{p} \oplus \mathrm{q} \stackrel{\mathrm{def}}{=} (\mathrm{p} \wedge \neg \mathrm{q}) \vee (\neg \mathrm{p} \wedge \mathrm{q})$$

如果将不带 $\neg$ 的视为 1，带 $\neg$ 的视为 0, 上式右边的式子便可以看作由异或的取真赋值写成的公式。

由真值表来书写公式

由取真赋值来写

- **核心思想**：将所有取真赋值用 $\wedge$ 表达出来，然后用 $\vee$ 连接起来，表示任选其中一个取真赋值便能使其为真，否则为假。
- **示例**：假设 $\mathrm{p}=1,\mathrm{q}=1,\mathrm{r}=0$ 为其一个取真赋值，则建立公式 $\mathrm{p}\wedge\mathrm{q}\wedge\neg\mathrm{r}$，该公式仅有在 $\mathrm{p}=1,\mathrm{q}=1,\mathrm{r}=0$ 时为真。

由取假赋值来写

- **核心思想**：将所有取假赋值用$\vee$表达出来，然后用$\wedge$连接起来，表示只有不取到其中任何一个赋值时才能为真，否则为假。
- **示例**：假设 $\mathrm{p}=1,\mathrm{q}=1,\mathrm{r}=0$ 为其一个取假赋值，则建立公式 $\neg\mathrm{p}\vee\neg\mathrm{q}\vee\mathrm{r}$，该公式仅在 $\mathrm{p}=1,\mathrm{q}=1,\mathrm{r}=0$ 时为假，意味着此时取到了取假赋值。

由真值表来书写公式

我们通过如下一个例子来说明，假设 p, q 是两个命题变元，公式 A 的真值表如下：

p	q	A
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

- 由取真赋值来写：$A = (\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q)$.
- 由取假赋值来写：$A = (p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q)$.

当然我们也可以发现，A 其实就是 $p \leftrightarrow q$.

联结词的个数

我们之前介绍了几种常见的联结词，一个很自然的问题是到底有多少联结词？

例 9.

我们可以定义很多新的联结词：

- 异或 (XOR): $p \oplus q \stackrel{def}{=} (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$
- 与非 (NAND): $p \uparrow q \stackrel{def}{=} \neg(p \wedge q)$
- 或非 (NOR): $p \downarrow q \stackrel{def}{=} \neg(p \vee q)$

问题 10.

对于 n 个命题变元 $p_1, \ldots p_n$，一共可以定义出多少个不同的联结词？这其中互相独立的有多少个？

真值函数

一个 n 元联结词实际上可以看作是由 $\{0,1\}^n$ 指向 $\{0,1\}$ 的一个函数，我们称这样的函数为真值函数。

定义 11 **[真值函数].**

真值函数，是指以真值为定义域和值域的函数，即 $\{0,1\}^n$ 到 $\{0,1\}$。

例 12.

一元联结词 $\neg$ 可以看成如下一个真值函数 $\neg : \{0,1\} \to \{0,1\}$:

$$\neg(0) = 1,\ \neg(1) = 0.$$

因此，前面的问题变转化成：一共有多少个 n 元真值函数?

一元联结词的个数

先从最简单的一元联结词入手。

一元真值函数只有一个自变元 x，它有两个取值可能 $0, 1$。对于其每个取值，函数也有两种不同的函数值 $0, 1$。因此一共可以定义 4 个不同的一元真值函数，如下表:

x	$f_0(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

相应的，有 4 个一元联结词，但 f_0 和 f_3 表示永假和永真，f_1 表示不变，因此只有 f_2（即 $\neg$）被经常使用。

二元联结词的个数

同样的方式，我们可以列举出所有的二元联结词，一共 $2^{2^2} = 16$ 个:

x	y	$g_0(x,y)$	$g_1(x,y)$	$g_2(x,y)$	$\dots$	$g_{15}(x,y)$
0	0	0	0	0		1
0	1	0	0	0		1
1	0	0	0	1		1
1	1	0	1	0		1

显然,g_1 就是我们熟知的 $\wedge$.

n 元联结词的个数

一般的，我们有：

引理 13.

n 元真值函数一共有 2^{2^n} 仲，因此一共可以定义 2^{2^n} 种不同的联结词。

例 14.

我们可以顶一个一个三元联结词 $\#$：

$\#(x, y, z)$ 为真当且仅当 x, y, z 至少两个为真。

其对应的真值函数满足：

$$\#(0,0,0) = 0,\ \#(0,0,1) = 0, \#(0,1,0) = 0,\ \#(0,1,1) = 1$$
$$\#(1,0,0) = 0,\ \#(1,0,1) = 1, \#(1,1,0) = 1,\ \#(1,1,1) = 1$$

第二个关于联结词的问题是哪些联结词是能相互表示的?

例 15.

$\neg, \vee$ 便可以表示我们学过的其他三个联结词 $\wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$:

- $A \wedge B \overset{def}{=} \neg(\neg A \vee \neg B)$.
- $A \rightarrow B \overset{def}{=} \neg A \vee B$.
- $A \leftrightarrow B \overset{def}{=} (\neg(\neg A \vee \neg B)) \vee (\neg(A \vee B))$

而仅依靠 $\vee, \wedge$ 却不能表示所有的联结词，比如它不能表示 $\neg$.

联结词的完备集

定义 16 **[完备集].**

令 S 是一个联结词集合，若任何一个 n 元真值函数都可以仅由 S 中的联结词构成的公式表示，则称 S 是联结词完备集。

例 17.

由上述讨论可知，以下都是完备集：

$$\{\neg, \vee\},\ \{\neg, \wedge\},\ \{\neg, \rightarrow\},\ \{\neg, \vee, \wedge\},\ \{\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$$

而以下集合都不是完备集：

$$\{\neg\},\ \{\vee, \wedge\},\ \{\neg, \leftrightarrow\}$$

上述完备集的证明可以通过前面所提的通过真值表来书写公式的方法来证明。

最小联结词完备集 (基底)

定义 18 **[最小联结词完备集 (基底)].**

完备的联结词集合的联结词是独立的，也就是说这些联结词不能相互表示；或者说，不含冗余联结词联结词集合, 称为最小联结词完备集 (基底).

例 19.

以下都是最小联结词完备集:

$$\{\neg, \vee\}, \{\neg, \wedge\}, \{\neg, \rightarrow\}$$

问题 20.

存不存在只有一个联结词的最小完备集?

与非 (NAND) 和或非 (NOR)

定义下述两个联结词：

- 与非 (NAND): $A \uparrow B \stackrel{\mathrm{def}}{=} \neg(x \wedge y)$
- 或非 (NOR): $A \downarrow B \stackrel{\mathrm{def}}{=} \neg(x \vee y)$

定理 21.

$\{\uparrow\}$ 和 $\{\downarrow\}$ 都是最小联结词完备集。

证明. 我们只证明 $\{\uparrow\}$，事实上：

- $\neg A \Leftrightarrow A \uparrow A$.
- $A \wedge B \Leftrightarrow (A \uparrow B) \uparrow (A \uparrow B)$.

□

联结词总结

联结词

- 由真值表书写公式.
  - 由成真赋值来写。
  - 由成假赋值来写。
- 联结词的个数，真值函数。
- 联结词的完备集。
  - 完备集的概念。
  - 最小完备集。

命题公式的范式

标准形式

我们知道，尽管等值的 n 元公式只有 2^{2^n} 个，但是公式的数量是无穷多的：

$$x, \neg x, \neg\neg x, \neg\neg\neg x, \ldots,$$

能否找到一种**标准形式**，使得等值的不同公式都可以转换成相同的形式？

上海师范大学 Shanghai Normal University

定义 22 **[一些术语的定义].**

我们下面介绍一些术语:

- 命题变项 p 和其否定 $\neg p$ 都被称为文字
- 有限个文字的合取叫简单合取式。
- 有限个文字的析取叫简单析取式。
- p 与 $\neg p$ 被称为互补对。

定义 23 **[析取范式和合取范式].**

- 由若干个简单合取式用析取联结词 $\vee$ 连接起来的公式称为析取范式。
- 由若干个简单析取式用合取联结词 $\wedge$ 连接起来的公式称为合取范式。

范式举例 (I)

上海师范大学 Shanghai Normal University

析取范式的例子

1. $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q)$
2. $(p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$
3. $(p \wedge \neg p) \vee (q \wedge q)$.

合取范式的例子

1. $(p \vee q) \wedge (\neg p \vee q)$
2. $(p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)$
3. $(p \vee \neg p) \wedge (q \vee q)$.

范式的存在性

由之前的讨论我们知道，$\{\neg, \vee, \wedge\}$ 是一个联结词完备集，因此任何一个公式都可以转换成一个等值的只有这三个联结词的公式。

再由双重否定律、德摩根律、分配律:

$$\neg\neg A \Leftrightarrow A$$

$$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$$

$$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$$

$$A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$

$$A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$

定理 24 **[范式存在定理].**

任何一个命题公式存在与其等值的的析取范式和合取范式。

求范式的方法

上海师范大学 Shanghai Normal University

上述证明也给出了求范式的方法：

范式求法

1. 消去其中不是 $\neg, \vee, \wedge$ 的联结词：
   - $A \to B = \neg A \vee B$.
   - $A \leftrightarrow B = (\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B)$.
2. 用德摩根律将否定号移到文字上。
   - $\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$.
   - $\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$.
3. 用分配律将公式化为合取范式或析取范式。
   - $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$.
   - $A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$.
4. 进行适当的化简。
   - $A \vee \neg A = 1$.
   - $A \wedge \neg A = 0$.

范式举例 (II)

上海师范大学 Shanghai Normal University

求 $(p \to q) \leftrightarrow r$ 的合取范式和析取范式

1. 先求合取范式。

$$
\begin{aligned}
(p \to q) \leftrightarrow r &= (\neg p \vee q) \leftrightarrow r && \text{(消去 } \to\text{)} \\
&= (\neg(\neg p \vee q) \vee r) \wedge ((\neg p \vee q) \vee \neg r) && \text{(消去 } \leftrightarrow\text{)} \\
&= ((p \wedge \neg q) \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r) && \text{(德摩根律)} \\
&= (p \vee r) \wedge (\neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r) && \text{(分配律)}
\end{aligned}
$$

2. 再求析取范式。

$$
\begin{aligned}
(p \to q) \leftrightarrow r &= ((p \wedge \neg q) \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r) && \text{(前面一致)} \\
&= ((p \wedge \neg q) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r)) \vee (r \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r)) && \text{(分配律)} \\
&= (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (r \wedge \neg p) \vee (r \wedge q) && \text{(分配律)}
\end{aligned}
$$

范式的作用

上海师范大学 Shanghai Normal University

一些具有特定形式的范式可以帮助我们判断范式的种类：

- 如果合取范式里的每个简单析取式都有互补对，则该范式是重言式.
  - $(p \vee \neg p \vee r) \wedge (q \vee \neg q)$.
- 如果析取范式里的每个简单合取式都有互补对，则该范式是矛盾式.
  - $(p \wedge \neg p \vee q) \vee (q \wedge \neg q \vee r)$.

范式的作用

是否可以通过范式来判断是否 $A \Leftrightarrow B$?

考察如下两个命题公式:

1. $A = (\neg p \wedge r) \vee (q \wedge r)$.
2. $B = (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r)$

显然 A, B 都是析取范式，并 $A \Leftrightarrow B$. 但是，它们的形式却完全不同。

可不可以转换成一类范式，使得如果两个公式是等值的，则它们转换成的范式形式上是一摸一样的?

- **主范式!**

定义 25.

令公式只涉及 n 个命题变量 $x_1, \ldots, x_n$，一个极小项指的是一个由 n 个文字构成的合取式，其中每个命题变量 x_i 以 x_i 或者 $\neg x_i$ 恰好仅出现在左起第 i 个文字上（即命题公式里的文字按字典序排列出现）。

例 26.

令 p, q, r 为涉及到的所有命题变元，以下合取式都是极小项：

- $p \wedge q \wedge r$.
- $\neg p \wedge q \wedge \neg r$.

每个极小项都包含了所有的命题变元，且每个变元恰好出现一次。

极小项的性质

极小项的性质

- 极小项一共有 2^n 个。
  - 可以用 n 位二进制数来记录每个极小项，即用 0 来表示 $\neg x_i$,1 来表示 x_i, 比如：m_0 可以用来表示 $\neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge \ldots \wedge \neg x_n$.
  - 由上述讨论可知，n 个变元的极小项可以用 $m_0, \ldots m_{2^n-1}$ 来表示。
- 任何一个极小项只在一个赋值（解释）下为真，即上述表示的二进制数。
- 极小项互不等值，且任何两个极小项的合取是永假的。
- 由所有极小项的析取构成的公式是永真的。

极小项的意义

极小项相当于唯一确定了一成真赋值，因此对于由所有极小项的析取构成的公式来说，任何一个赋值都是使其为真的赋值，从而该公式是永真的。

极大项

上海师范大学 Shanghai Normal University

定义 27 **[极大项].**

令公式只涉及 n 个命题变量 $x_1, \ldots, x_n$，一个极大项指的是一个由 n 个文字构成的析取式，其中每个命题变量 x_i 以 x_i 或者 $\neg x_i$ 恰好仅出现在左起第 i 个文字上（即命题公式里的文字按字典序排列出现）。

例 28.

令 p, q, r 为涉及到的所有命题变元，以下析取式都是极大项:

- $p \vee q \vee r$.
- $\neg p \vee q \vee \neg r$.

每个极大项都包含了所有的命题变元，且每个变元恰好出现一次。

极大项的性质

极大项的性质

- 极大项一共有 2^n 个。
  - 可以用 n 位二进制数来记录每个极大项，即用 0 来表示x_i,1 来表示$\neg x_i$, 比如：M_0 可以用来表示 $x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_n$.
  - 由上述讨论可知，n 个变元的极大项可以用 $M_0, \ldots M_{2^n-1}$ 来表示。
- 任何一个极大项只在一个赋值（解释）下为假，即上述表示的二进制数。
- 极大项互不等值，且任何两个极大项的析取是永真的。
- 由所有极大项的合取构成的公式是永假的。

极大项的意义

极大项相当于唯一确定了一成假赋值，因此对于由所有极大项的合取构成的公式来说，任何一个赋值都是使其为假的赋值，从而该公式是永假的。

主范式

由极小项和极大项的概念，我们可以提出唯一的表达形式-主范式的概念。

定义 29 **[主合取范式和主析取范式].**

仅由极小项（resp. 极大项）构成的析取范式（resp. 合取范式）称为主析取范式（resp. 主合取范式）。

定理 30 **[主范式的存在和唯一性].**

- 任何一个含有 n 个命题变元的公式，都有唯一的与之等值的恰含这 n 个变元的主析取范式。
- 任何一个含有 n 个命题变元的公式，都有唯一的与之等值的恰含这 n 个变元的主合取范式。

主范式的求法-利用基本等值式

主析取范式的求法

- 利用基本等值式求出一个析取范式。
- 如果某个简单合取式 A 未出现命题变元 x, 则通过:

$$A \Leftrightarrow A \wedge (x \vee \neg x)$$
$$\Leftrightarrow (A \wedge x) \vee (A \wedge \neg x)$$

  补足 x。
- 去除重复的变量、矛盾式以及重复出现的极小项。

主合取范式的求法

- 利用基本等值式求出一个合取范式。
- 如果某个简单析取式A 未出现命题变元 x, 则通过:

$$A \Leftrightarrow A \vee (x \wedge \neg x)$$
$$\Leftrightarrow (A \vee x) \wedge (A \vee \neg x)$$

  补足 x。
- 去除重复的变量、矛盾式以及重复出现的极大项。

求 $(p \to q) \leftrightarrow r$ 的主合取范式和主析取范式

求主合取范式:

- 由之前的讨论可得其的合取范式:

$$(p \vee r) \wedge (\neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r)$$

- 对于前两个简单析取式 $(p \vee r)$ 和 $(\neg q \vee r)$, 我们分别补足变元 q 和 p:
  - $(p \vee r) \wedge (q \vee \neg q) = (p \vee r \vee q) \wedge (p \vee r \vee \neg q)$.
  - $(\neg q \vee r) \wedge (p \vee \neg p) = (\neg q \vee r \vee p) \wedge (\neg q \vee r \vee \neg p)$
- 整理极大项可得:

$$(p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r)$$

上述主合取范式也可以表示为: $M_0 \wedge M_2 \wedge M_5 \wedge M_6$.

求 $(p \to q) \leftrightarrow r$ 的主合取范式和主析取范式

求主析取范式:

- 由之前的讨论可得其的析取范式:

$$(p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (r \wedge \neg p) \vee (r \wedge q)$$

- 对于后两个简单合取式 $(r \wedge \neg p)$ 和 $(r \wedge q)$, 我们分别补足变元 q 和 p:
  - $(r \wedge \neg p) \vee (q \wedge \neg q) = (r \wedge \neg p \wedge q) \vee (r \wedge \neg p \wedge \neg q)$
  - $(r \wedge q) \vee (p \wedge \neg p) = (r \wedge q \wedge p) \vee (r \wedge q \wedge \neg p)$
- 整理极小项可得:

$$(\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r)$$

上述主析取范式也可以表示为: $m_1 \vee m_3 \vee m_4 \vee m_7$.

主范式的求法-利用真值表

考察如下的命题公式：$p \to (p \wedge q)$，其真值表为：

p	q	$(p \to (p \wedge q))$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

其中有 3 个成真赋值 $00, 01, 11$ 和 1 个成假赋值 10，因此：

- **主析取范式**为：$m_0 \vee m_1 \vee m_3$.
- **主合取范式**为：M_2

主析取范式和主合取范式的转换

主析取范式可以视作是将所有代表成真赋值的极小项 析取而成，而**主合取范式**可以视作是将所有代表成假赋值的极大项合取而成。

主析取范式和主合取范式的转换

令 $A = m_{i_1} \vee \ldots \vee m_{i_k}$ 是一个 n 个变元的主析取范式，则:

1. $I = \{i_1, \ldots, i_k\}$ 是相应的成真赋值集合。
2. $J = \{0, \ldots, 2^n - 1\} \setminus I$ 为其成假赋值，记为 $j_1, \ldots j_{2^n - k}$。
3. $M_{j_1} \wedge \ldots \wedge M_{j_{2^n - k}}$ 是其主合取范式。

例 31.

某科研所要从 3 名科研骨干 A, B, C 中挑选 $1 \sim 2$ 名出国进修，由于工作需要需要满足如下条件:

- 若 A 去，则 C 也要去。
- 若 B 去，则 C 不能去。
- 若 C 不去，则 A 和 B 至少要去一个。

问有哪些选派方案?

解 32.

令 p : 派 A 去　q : 派 B 去　r : 派 C 去

则上述条件可以转换为

$$(p \to r) \wedge (q \to \neg r) \wedge (\neg r \to (p \vee q))$$

上述公式的主析取范式为:

$$m_1 \vee m_2 \vee m_5$$

因此一共有 3 种方案:

- 只派 C 去 (对应 1(二进制形式: $(001)_2$))。
- 只派 B 去 (对应 2(二进制形式: $(010)_2$))。
- 派 A, C 去 (对应 5(二进制形式: $(101)_2$))。

命题公式的范式总结

命题公式范式

- 命题公式的标准形式。
  - 析取范式。
  - 合取范式。
- 求范式的方法 (基本等值式、真值表)。
- 主析取范式和主合取范式
  - 极小项和极大项
  - 互相的转化

可满足性问题

定义 33 **[SAT 问题 (Satisfiability Problem)].**

给定一个 n 个变元的命题公式，可满足性问题是指，是否存在一个使其为真的赋值？

我们知道对于任何一个命题公式，其可以转换成析取范式或者合取范式，哪种范式的可满足性更容易判断？

析取范式！ 应为析取范式只需要使得其中某个简单合取式成真即可。

但有时，相应的析取范式会非常的长，比如 $p \vee q$ 而言，其析取范式为：

$$(p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$$

SAT 问题介绍

一般 SAT 问题考察的是一个合取范式 C，n-SAT 问题则要求 C 中每个析取式最多不超过 n 个文字。

第一个 NP 完全问题

1971 年 Stephen Cook和Leonid Levin提出了 Cook-Levin 定理，证明了 SAT 问题是第一个 NP 完全问题。

SAT 问题在计算机科学中有着重要的作用，比如在程序正确性分析里，通过将所需要的性质转换成相应的合取范式，即可通过 SAT 问题来判断该性质是否成立。

国际上每年都有关于 SAT solver 问题的竞赛，具体可以参考
http://www.satcompetition.org/

消解法-思路

令 C_1, C_2 表示合取范式 C 中两个不同的简单析取式，满足：

$$C_1 = A \vee x \quad C_2 = B \vee \neg x$$

记 $Res(C_1, C_2) = A \vee B$。我们可以发现 $C_1 \wedge C_2$ 的可满足性与 $A \vee B$ 相同。

- 如果 $A \vee B$ 是可满足的，此时必然存在一个赋值使得 A 或 B 满足，不妨设为 A，则令 $x = 0$，可以得到使 $C_1 \wedge C_2$ 满足的一组赋值。
- 如果 $C_1 \wedge C_2$ 是可满足的，取其中一个令其为真的解释，并不妨令 $x = 0$，此时由定义 A 必然是可满足的，从而 $A \vee B$ 是可满足的。

消解法

从而我们可以得出如下的思路：对 C 中的简单析取式一直进行上述的消解操作，直到不产生新的公式或者产生了矛盾式为止。

消解法

输入: n 个变元的合取范式 $C = C_1 \wedge C_2 \dots C_m$

输出: C 是否可满足?

1: $S_0 \leftarrow \emptyset,\ S_1 \leftarrow \{C_1, \dots, C_n\},\ S_2 \leftarrow \emptyset$
2: **for** any $c_1 \in S_0,\ c_2 \in S_1$ **do**
3: **if** c_1 and c_2 can be resolved **then**
4: $c \leftarrow Res(c_1, c_2)$
5: **if** $c = \epsilon$ **then return** $False$
6: **else if** $c \notin S_0 \cup S_1$ **then** $S_2 \leftarrow S_2 \cup \{c\}$
7: **for** any $c_1,\ c_2 \in S_1$ **do**
8: **if** c_1 and c_2 can be resolved **then**
9: $c \leftarrow Res(c_1, c_2)$
10: **if** $c = \epsilon$ **then return** $False$
11: **else if** $c \notin S_0 \cup S_1$ **then** $S_2 \leftarrow S_2 \cup \{c\}$
12: **if** $S_2 = \emptyset$ **then return** $True$
13: **else**
14: $S_0 \leftarrow S_0 \cup S_1,\ S_1 \leftarrow S_2,\ S_2 \leftarrow \emptyset$
15: Goto Line 2

消解法-例子

$(\neg p \vee q) \wedge (p \vee q) \wedge (\neg q)$ 运用消解法的例子

1. 先找出其简单析取式：

   $S_0 = \{\},\ S_1 = \{\neg p \vee q,\ , p \vee q,\ \neg q\},\ S_2 = \{\}$

2. 对 S_0 和 S_1 之间以及 S_1 内部寻找可以消解的公式：
   - $Res(\neg p \vee q,\ p \vee q) = q.$
   - $Res(\neg p \vee q,\ \neg q) = \neg p.$
   - $Res(p \vee q,\ \neg q) = p.$

3. 更新 S_0, S_1, S_2：

   $S_0 = \{\neg p \vee q,\ , p \vee q,\ \neg q\}, S_1 = \{p, \neg p, q\},\ S_2 = \{\}$

4. 重复上述过程，由于：

   $Res(p, \neg p) = \epsilon$

   我们可以得到上述公式不可满足。

关于 SAT 问题

- 2-SAT 问题是有多项式算法的。
- 消解法并不是目前常用的 SAT 问题的求解方法，其并不高效。目前比较常用的算法是基于回溯思想的 DPLL 算法以及其进一步改进的 CDCL 算法。这些算法在实际中有着非常好的效果。
- 此外，还有一类非完备类的算法。即该类算法只能证明一个公式是可满足的，但是不能证明一个公式是不可满足的。这类算法的代表是 Stochastic Local Search 算法。
- 其衍生 SMT-solver 也有着非常广泛的应用。

扩展资料

- SAT 问题简介：这是中科大吉建民副教授的对 SAT 问题的一个介绍，可供参考。

本章总结

- 等值演算。
- 联结词的完备集。
- 命题公式的范式。
- 可满足性问题。