《离散数学》

3-命题逻辑 (III)(Proposition Logic(III))

杨启哲

上海师范大学信机学院计算机系

2024 年 10 月 9 日

上节回顾

- 等值演算
  - 等值式的概念、基本等值式。
- 命题公式的范式
  - 主析取范式、主合取范式
- 联结词的完备集
  - 最小联结词完备集
- 可满足性问题、
  - 消解法。

主要内容

- 推理的形式结构

- 不同的推理系统

推理的形式结构

什么是推理?

上海师范大学 Shanghai Normal University

例 1.

如果我今天病了，那么我没来上课。

今天我病了。

所以今天我没来上课。

例 2.

若 a 能被 4 整除，则 a 能被 2 整除。

a 能被 2 整除。

所以 a 能被 4 整除。

定义 3 **[推理的形式结构].**

设 $A_1, \ldots A_k$ 和 B 都是命题公式，由 $A_1, \ldots, A_k$ 推出 B 的推理记为：

$$\{A_1, \ldots, A_k\} \vdash B$$

令集合 $C = \{A_1, \ldots, A_n\}$，则上式也记为：$C \vdash B$，C 被称为前提，而 B 则被称为结论。

回顾例1和例2

- 在例1中，令 p 表示“我今天生病了”，q 表示” 今天我没来上课”，则推理可表示为：

$$\{p, p \to q\} \vdash q$$

- 在例2中，令 p 表示“a 能被 4 整除”，q 表示”a 能被 2 整除“，则推理可表示为：

$$\{q, p \to q\} \vdash p$$

正确的推理

- 显然。例1是正确的推理，而例2是错误的推理。
- 我们判断正确与否的方法，其实是在判断前提都为真的情况下，结论是否一定为真。

定义 4 **[正确的推理].**

令 $\{A_1, \ldots, A_k\} \vdash B$ 是一个推理，该推理是正确的，当且仅当对于任何一组使得 $A_1, \ldots, A_n$ 都为真的赋值，B 也为真。我们将正确的推理记为：

$$\{A_1, \ldots, A_k\} \vDash B$$

对推理形式的一些说明 (**重要！**)

- 事实上，这里有一些符号滥用，为了与书保持一致，我们保留了两者符号。
- 对于 $\vDash$ 来说，其实际定义了语义上的推理正确，即通过真值来判断结论是否正确。
- 对于 $\vdash$ 来说，事实上这里只能象征着抽象的推理符号，其表明是我们在人为建立某些规则的情况下作出的推理，即语法上的推理正确。

定理 5.

命题 $A_1, \ldots, A_k$ 推出 B 的推理正确当且仅当:

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k \rightarrow B$$

为重言式。特别的，我们将该正确的推理记为 $A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k \Rightarrow B$，也称之为重言蕴含。

推理形式

我们把上述公式 $A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k \rightarrow B$ 也称为该推理的形式结构。

由上述定理可以看到，判断 $A \Rightarrow B$ 是否是一个正确的推理，完全取决于其真值的情况，即判断公式 $A \to B$ 是否是重言式。

从而我们一般有如下几种方法：

1. 真值法证明 $A \to B$ 是重言式。
2. 等值演算法证明 $A \to B$ 是重言式，或者 $A \wedge \neg B$ 是矛盾式。
3. 用范式来证明 $A \to B$ 是重言式，或者 $A \wedge \neg B$ 是矛盾式。
4. 解释法。

验证举例-真值表

判断推理 $\{P \to Q, P\} \vdash Q$ 是否是正确的。

上述推理正确，当且仅当 $(P \to Q) \wedge P \to Q$ 是重言式。

- (**真值表技术**) 构造真值表可知上述公式是重言式，从而该推理是正确的，即 $(P \to Q) \wedge P \vDash Q$

P	Q	$P \to Q$	$(P \to Q) \wedge P$	$(P \to Q) \wedge P \to Q$
0	0	1	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

验证举例-等值演算

判断推理 $\{P \to Q, P\} \vdash Q$ 是否是正确的。

上述推理正确，当且仅当 $(P \to Q) \wedge P \to Q$ 是重言式。

- (**等值演算**) 由等值演算法可知:

$$
\begin{aligned}
& (P \to Q) \wedge P \to Q \\
\Leftrightarrow \quad & \neg((\neg P \vee Q) \wedge P) \vee Q \\
\Leftrightarrow \quad & ((P \wedge \neg Q) \vee \neg P) \vee Q \\
\Leftrightarrow \quad & \neg Q \vee \neg P \vee Q \\
\Leftrightarrow \quad & 1
\end{aligned}
$$

判断推理 $\{P \to Q, P\} \vdash Q$ 是否是正确的。

上述推理正确，当且仅当 $(P \to Q) \wedge P \to Q$ 是重言式。

- **(解释法)**
  - 若 $P = 0$，则 $(P \to Q) \wedge P$ 为假，从而上述公式一定为真.
  - 若 $P = 1$，则如果 $Q = 0$，则有 $(P \to Q) \wedge P$ 为假，从而上述公式一定为真；若 $Q = 1$，则 $(P \to Q) \wedge P$ 为真，从而公式为真。

因此无论如何，公式 $(P \to Q) \wedge P \to Q$ 均为真，从而上述推理是正确的。

判断推理 $\{P \to Q, Q\} \vdash P$ 是否是正确的。

上述推理正确，当且仅当 $(P \to Q) \land Q \to P$ 是重言式。

- **(主析取范式)** 由等值演算法可知:

$$
\begin{aligned}
&(P \to Q) \land Q \to P \\
\Leftrightarrow &\neg((\neg P \lor Q) \land Q) \lor P \\
\Leftrightarrow &((P \land \neg Q) \lor \neg Q) \lor P \\
\Leftrightarrow &\neg Q \lor P \\
\Leftrightarrow &(\neg Q \land (P \lor \neg P)) \lor (P \land (Q \lor \neg Q)) \\
\Leftrightarrow &(\neg P \land \neg Q) \lor (P \land \neg Q) \lor (P \land Q) \\
\Leftrightarrow &m_0 \lor m_2 \lor m_3
\end{aligned}
$$

上述主析取范式缺少 m_1(即：$\neg P \land Q$), 从而该公式不是重言式，因此推理是不正确的。

上海师范大学 Shanghai Normal University

一般来说，我们将没有任何前提可证出来的推理称之为定理。

推理定律举例

1. $A \Rightarrow (A \vee B)$(附加律).
2. $A \wedge B \Rightarrow A$(化简律).
3. $(A \to B) \wedge A \Rightarrow B$(假言推理律).
4. $(A \to B) \wedge \neg B \Rightarrow \neg A$(拒取式)
5. $(A \vee B) \wedge \neg B \Rightarrow A$(析取三段论).
6. $(A \to B) \wedge (B \to C) \Rightarrow A \to C$(假言三段论)
7. $(A \leftrightarrow B) \wedge (B \leftrightarrow C) \Rightarrow A \leftrightarrow C$(等价三段论)
8. $(A \to B) \wedge (C \to D) \wedge (A \vee C) \Rightarrow B \vee D$(构造性二难)

   $(A \to B) \wedge (\neg A \to B) \Rightarrow B$(特殊形式)
9. $(A \to B) \wedge (C \to D) \wedge (\neg B \vee \neg D) \Rightarrow (\neg A \vee \neg C)$(破坏性二难)

验证推理正确的另外一种方式-证明

上述的提到的验证推理正确的方式，本质上还是在遍历其真值表。

- 当命题变元增加时，其真值表会以指数的大小增加。
- 通过真值的手段还是基于命题公式所蕴含的语义推出的。

有没有更简单一些的方法来验证推理是否正确?

证明 (proof)!

定义 6 **[形式系统].**

一个形式系统 I 由下面 4 个部分组成:

1. 非空的字母表 $A(I)$.
2. $A(I)$ 中的符号构造的合式公式集 $E(I)$.
3. $E(I)$ 中的一些特殊公式组成的公理集 $A_x(I)$.
4. 推理规则集 $R(I)$。

将 I 记为四元组 $< A(I), E(I), A_x(I), R(I) >$，其中 $< A(I), E(I) >$ 称为 I 的形式语言系统，$< A_x(I), R(I) >$ 称为 I 的形式演算系统。

Shanghai Normal University

定义 7 **[证明].**

令有前提 $A_1, ... A_k$、结论 B 和一个形式系统 $I =< A(I), E(I), A_x(I), R(I) >$，称一个在 I 中由 $A_1, ... A_k$ 推出 B 的证明是一个公式序列:

$$C_1, \ldots, C_l$$

其中:

- 每个 C_i 是 I 的形式语言系统的一个合式公式。
- 每个 C_i 要么是某个 A_i，要么是某个 I 中的公理，要么可以由 $C_1, ... C_{i-1}$ 利用 I 中的推理规则集得出。

证明验证推理的正确性

可以看到，所谓证明，其实是从一个形式演算系统里，通过一些公理、前提和推理规则所得出的一个公式序列。

- 显然，该过程和公式本身的真值并无关系。
- 这样的一个证明仅仅由若干个预先设置好的公理和推理规则集以及一些前提产生。

显然我们可以定义**不同的**形式演算系统。

证明的正确性?

- **可靠性 (soundness)**: 即形式演算系统给出的证明能不能表示相应的推理是正确的。
- **完备性 (completeness)**: 即对于一个正确的推理该形式演算系统能不能给出一个相应的证明。
- **一致性 (consistency)**: 即这个演算系统是不是能同时证明某个公式和该公式的否。

不同的推理系统

自然推理系统 P(I)

自然推理系统 P 的定义如下，其没有公理，相应的形式语言系统如之前所定义，推理规则如下所示:

1. 前提引入规则 (P 规则)，在证明中可随时引入前提。
2. 结论引入规则 (T 规则)，在证明中得到的任何结论都可以被引入
3. 置换规则，在证明中可以将任何子公式用等值的公式置换，得到公式序列中的另一个公式。
4. 分离规则 (假言推理)，即由 $A \rightarrow B$ 和 A 可以引入 B
5. 附加规则，即由 A 可以引入 $A \vee B$
6. 化简规则，即由 $A \wedge B$ 可以引入 A
7. 拒取规则，即由 $\neg B$ 和 $A \rightarrow B$ 可以引入 $\neg A$

自然推理系统 P(II)

8. 假言三段论，即由 $A \to B$ 和 $B \to C$ 可以引入 $A \to C$
9. 析取三段论，即由 $A \vee B$ 和 $\neg B$ 可以引入 A
10. 构造性二难，即由 $A \to B$ 和 $C \to D$ 和 $A \vee C$ 可以引入 $B \vee D$
11. 破坏性二难，即由 $A \to B$ 和 $C \to D$ 和 $\neg B \vee \neg D$ 可以引入 $\neg A \vee \neg C$
12. 合取引入规则，即由 A 和 B 可以引入 $A \wedge B$

对于上述规则，如分离规则，我们也可以用下面的形式进行描述：

$$\text{分离规则:}\quad \begin{array}{ll} & A \\ & A \to B \\ \hline \therefore & B \end{array}$$

例 8.

在自然推理系统 P 中构造下面推理的证明。

- 前提：$p \vee q,\ q \to r,\ p \to s,\ \neg s$
  结论：$r \wedge (p \vee q)$.

证明.

1. $\neg s$ (前提引入)
2. $p \to s$ (前提引入)
3. $\neg p$ (1,2 拒取)
4. $p \vee q$ (前提引入)
5. q (3，4 析取三段论)
6. $q \to r$ (前提引入)
7. r (5,6 分离规则)
8. $r \wedge (p \vee q)$ (4,7 合取引入)

上海师范大学 Shanghai Normal University

例 9.

在自然推理系统 P 中构造下面推理的证明。

- 前提：$\neg p \vee q$，$r \vee \neg q$，$r \to s$
  结论：$p \to s$.

证明.

1. $\neg p \vee q$ （前提引入）
2. $p \to q$ （置换规则）
3. $r \vee \neg q$ （前提引入）
4. $q \to r$ （置换规则）
5. $p \to r$ （2，4 假言三段论）
6. $r \to s$ （前提引入）
7. $p \to s$ （5，6 假言三段论）

□

自然推理系统 P 中的证明示例 (III)

例 10.

在自然推理系统 P 中构造下面推理的证明。

- 若数 a 是实数，则他不是有理数就是无理数；若 a 不能表示成分数，则它不是有理数，a 是实数且它不能表示成分数，所以 a 是无理数。

证明. 令：

p:	a 是实数。	q:	a 是有理数。
r:	a 是无理数。	s:	a 能表示成分数。

则上述推理变为：

- **前提**：$p \to (q \vee r)$，$\neg s \to \neg q$，$p \wedge \neg s$

  结论：r.

自然推理系统 P 中的证明示例 (III)

例10的证明续.

1. $p \wedge \neg s$ (前提引入)
2. $\neg s$ (1，化简规则)
3. $\neg s \to \neg q$ (前提引入)
4. $\neg q$ (2，3 分离规则)
5. p (1，化简规则)
6. $p \to (q \vee r)$ (前提引入)
7. $q \vee r$ (5，6 分离规则)
8. r (4，7 析取三段论)

$\square$

定理 11 **[演绎定理].**

$A_1, \ldots, A_k \Rightarrow A_{k+1} \to B$ 当且仅当：$A_1, \ldots, A_k,\ A_{k+1} \Rightarrow B$

- 此定理说明我们可以将代证的蕴含式里的前件也作为推理的前提使用。
- 该定理提供一种推理规则，附加前提规则 (CP 规则)，即要证明 $A_1, \ldots, A_k \Rightarrow A_{k+1} \to B$, 可以将 A_{k+1} 添加进前提去证明：$A_1, \ldots, A_k, A_{k+1} \Rightarrow B$.

例 12.

在自然推理系统 P 中构造下面推理的证明。

- 如果小王和小张去看电影，则小李也去看电影；小赵不去看电影或小张去看电影；小王去看电影；所以当小赵去看电影时，小李也去。

证明. 令；

p:	小张去看电影。	q:	小王去看电影。
r:	小李去看电影。	s:	小赵去看电影。

则

上述推理变为：

- **前提**: $(p \wedge q) \rightarrow r,\ \neg s \vee p,\ q$
  结论: $s \rightarrow r$.

自然推理系统 P 中的证明示例 (IV)

例12的证明续.（不利用 CP 规则）

1. $(p \wedge q) \to r$ (附加前提引入)
2. $\neg p \vee r \vee \neg q$ (1，置换规则)
3. q (前提引入)
4. $\neg p \vee r$ (2，3 析取三段论)
5. $p \to r$ (4，置换规则)
6. $\neg s \vee p$ (前提引入)
7. $s \to p$ (6，置换规则)
8. $s \to r$ (5，7 假言三段论)

$\square$

例12的证明续.（利用 CP 规则）

1. s (附加前提引入)
2. $\neg s \vee p$ (前提引入)
3. p (1，2 析取三段论)
4. q (前提引入)
5. $p \wedge q$ (3，4 合取引入规则)
6. $(p \wedge q) \to r$ (前提引入)
7. r (5，6 分离规则)

$\square$

定理 13 **[反证法].**

$A_1, \ldots, A_k \to B$ 当且仅当：$A_1, \ldots, A_k, \neg B \Rightarrow 0$

- 此定理说明我们可以将待证的公式的否定作为推理的前提使用，如果能推出矛盾，则证明完成。
- 该方法实际上是上述演绎定理的特例，因为事实上 $B \Leftrightarrow (\neg B) \to 0$.

自然推理系统 P 中的证明示例 (V)

例 14.

在自然推理系统 P 中构造下面推理的证明。

- 如果小王是理科生，他的数学成绩一定好. 如果小王不是文科生，他一定是理科生. 小王数学成绩不好. 所以小王是文科生.

证明. 令;

p: 小王是理科生。 q: 小王数学成绩好。
r: 小王是文科生。

则上述推理变为:

- 前提: $p \to q,\ \neg r \to p,\ \neg q$
  结论: r

例14的证明续.（不利用反证法）

1. $p \to q$ （前提引入）
2. $\neg p \vee q$ （1，置换规则）
3. $\neg q$ （前提引入）
4. $\neg p$ （2，3，析取三段论）
5. $\neg r \to p$ （前提引入）
6. $r \vee p$ （5，置换规则）
7. r （4，6，析取三段论）

$\square$

自然推理系统 P 中的证明示例 (V)

例14的证明续.（利用反证法，加入前提 $\neg r$）

1. $\neg r$ (结论否定引入)
2. $\neg r \to p$ (前提引入)
3. p (1，2 分离规则)
4. $p \to q$ (前提引入)
5. q (3，4，分离规则)
6. $\neg q$ (前提引入)
7. $q \wedge \neg q$ (5，6，合取引入规则)
8. 0 (7，置换规则)

□

Shanghai Normal University

我们下面来介绍另一种证明系统，消解证明系统。

消解回顾 (Resolution)

令两个命题公式 C_1 和 C_2 满足如下的形式:

$$C_1 = L \vee C_1', \qquad C_2 = \neg L \vee C_2'$$

则若 $C_1 \wedge C_2$ 为真，则 $C_1' \vee C_2'$ 也为真，并且我们记:$\mathrm{Res}(C_1, C_2) = C_1' \vee C_2'$

定理 15.

$C_1，C_2 \Rightarrow \mathrm{Res}(C_1，C_2)$

消解证明系统便是利用上述方式展开的推理证明。

- 整个系统将公式视为合取范式，其中每个析取范式作为前提，并且只有两种推理规则，即前提引入规则和消解规则：

$$\text{消解规则：}\ \frac{\begin{array}{c}\neg A \vee B \\ A \vee B'\end{array}}{B \vee B'}$$

- 本质思想是利用反证法，为了证明 $A \vDash B$，只需证明 $A \wedge \neg B$ 是矛盾式。

该规则可以看成是构造性二难得一个特例，如下所示，令 $C = \neg A$，则有：

$$\frac{\begin{array}{c}A \to B \\ \neg A \to C \\ A \vee \neg A\end{array}}{B \vee C}$$

事实上它是由分离规则推广而来。

例 16.

用消解证明法构造下列推理的证明:

- 前提: $q \to p$, $q \leftrightarrow s$, $s \leftrightarrow t, t \wedge r$
- 结论: $p \wedge q$

证明. 将前提全部写成合取范式，和结论得否定得到子句集合:

$$\{\neg q \vee p,\ \neg q \vee s,\ q \vee \neg s,\ s \vee \neg t, \neg s \vee t,\ t,\ r,\ \neg p \vee \neg q\}$$

则有:

1. $\neg q \vee p$, $\neg p \vee \neg q$	(前提引入)	5. $s \vee \neg t$	(前提引入)
2. $\neg q$	(1，消解规则)	6. $\neg t$	(4，5，消解规则)
3. $q \vee \neg s$	(前提引入)	7. t	(前提引入)
4. $\neg s$	(2，3，消解规则)	8. 0	(6，7，消解规则)

上海师范大学 Shanghai Normal University

最后我们来简单介绍一下Hilbert 公理系统。其主要由三个公理和一个推理规则组成:

公理

1. $H_1 : A \to (B \to A)$.
2. $H_2 : [A \to (B \to C)] \to [(A \to B) \to (A \to C)]$.
3. $H_3 : (\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$.(或者 $H_3 : \neg\neg A \to A$).

推理规则

1. MP 规则：由 $A, A \to B$ 可以导出 B.

令前提组成得集合为 Γ，如果存在一个 Hilbert 公理系统里到 A 的证明，则记为 $\Gamma \vdash_H A$.

一些例子 (I)

证明: $\vdash_{\mathrm{H}} A \to A$

1. $A \to ((A \to A) \to A)$ (公理 H_1, 令 $B = A \to A$)
2. $[A \to ((A \to A) \to A)] \to [(A \to (A \to A)) \to (A \to A)]$
   (公理 H_2, 令 $B = A \to A$, $C = A$)
3. $A \to (A \to A)$ (公理 H_1, 令 $B = A$)
4. $A \to A$ (两次 MP 规则)

定理 17 **[演绎定理].**

$$\{\Gamma, A\} \vdash_{\mathrm{H}} B \iff \Gamma \vdash_{\mathrm{H}} A \to B$$

上海师范大学 Shanghai Normal University

证明传递律: $P \to Q, Q \to R \vdash_H P \to R$

证明.

1. $(Q \to R) \to ((P \to (Q \to R)) \to A)$ （公理 H_1， 令 $A = Q \to R$, $B = P$）
2. $Q \to R$ （前提引入）
3. $P \to (Q \to R)$ （1,2, 演绎定理）
4. $(P \to (Q \to R)) \to ((P \to Q) \to (P \to R))$ （公理 H_2， 令 $A = P$, $B = Q$, $C = R$）
5. $(P \to Q) \to (P \to R)$ （3,4, 演绎定理）
6. $P \to Q$ （前提引入）
7. $P \to R$ （5,6, 演绎定理）

□

总结

本章总结

- 推理的形式结构。
  - 正确的推理。
  - 正确的证明。
- 不同的推理系统。
  - 自然推理系统 P.
  - 消解证明系统。
  - 公理证明系统。