《离散数学》

4-一阶逻辑 (I)(First-Order Logic(I))

杨启哲

上海师范大学信机学院计算机系

2024 年 10 月 3 日

命题逻辑回顾

- 命题与联结词
  - 命题的概念、联结词。
- 命题公式
  - 概念、等值演算、范式
- 推理和证明
  - 推理的形式结构。
  - 不同的证明系统，如自然推理系统。

一阶逻辑的基本概念

命题逻辑的局限性

考虑如下的推理:

1. 所有人都会死。
2. 苏格拉底是人。
3. 苏格拉底会死。

如果使用命题逻辑去描述，需要令上述三个命题分别为 p, q, r，则推理过程为:

$$(p \wedge q) \rightarrow r$$

然而这个推理形式并不是重言式。

命题逻辑的局限性

这意味着我们需要进一步对命题进行分解。比如考虑如下两个命题:

1. 张三是学生。
2. 李四是学生。

- 在命题逻辑中，这两个命题只能以不同的符号去表示，如 p, q 等。
- 但这两个命题又有共同点，其都描述了”是学生”这一属性。
- 如果我们令 P 表示是学生这一属性，则我们还需要定义 P 的主语，如 $P($ 张三 $), P($ 李四 $)$。
  - 令 x 表示主语，则 $P(x)$ 表示为 x 是学生，通常 $P(x)$ 就是我们所称的谓词 (Predicate)。

个体词 (主词)

我们首先对上述例子中出现的例如张三、李四等作一个概括-个体词 (主词)。

个体词

个体词指的是研究对象中独立存在的具体或抽象的客体。

- 个体常项 (常元)：具体特定的个体，一般用 a, b, c 表示。
- 个体变项 (变元)：不确定泛指的个体，一般用 x, y, z 表示。

个体域 (论域)

个体变项的取值范围称为个体域 (论域)。

- 论域可以是有穷集合，如 $\{1, 2, 3\}$ 等。
- 论域也可以是无穷集合，如 $\mathbb{N}$，$\mathbb{R}$ 等。
- 特殊的个体域：由一切事物组成的论域，称作全总个体域。

谓词描述性定义

- **一元谓词:**
  在一个命题里，如果主词只有一个，这时表示该主词性质或属性的词便称为一元谓词，以 $P(x), Q(x), \ldots$ 表示。
- **多元谓词:**
  在一个命题里，如果主词多于一个，这时表示该主词之间关系的词便称为多元谓词，以 $P(x,y), Q(x,y), R(x,y,z), \ldots$ 表示。

- 张三和李四是表兄弟。　　"… 是表兄弟" 是谓词。
- 5 大于 3。　　"… 大于 …" 是谓词。
- 天津位于北京的东南.　　"… 位于 … 的东南" 是谓词。

谓词的变元个数

我们称含 n 个个体变元 $x_1, \ldots, x_n$ 的谓词为n 元谓词。

- **一元谓词** $P(x)$: 用来描述个体的属性。
- **多元谓词** $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$: 用来描述个体间的关系。

---

0 元谓词?

- 就是命题！因为其是独立于任何个体变元的陈述句。
- 谓词逻辑是命题逻辑的推广。

谓词的定义

在一阶逻辑中，谓词实际上反映了个体之间性质的关系，即谓词可以看成是一个映射。

定义 1.

令个体域为 D，则 n 元谓词 $P(x_1, \ldots, x_n)$ 可以看作是 D^n 到 $\{0, 1\}$ 的映射。

关于谓词

$P(x)$ 具有命题的形式，但不是命题。只有 x 取定个体常元时，$P(x)$ 才是命题。

- 令 $P(x)$ 表示 x 是有理数，则 $P(3)$ 是命题，真值为 T。
- 令 $Q(x, y)$ 表示 x 大于 y，则 $Q(2, 3)$ 是命题，真值为 F.

函数的概念

既然存在个体变量，我们也可以引入函数的概念。

- $\text{father}(x)$ 表示 x 的父亲。
- $\text{mother}(x)$ 表示 x 的母亲。
- $\ldots$

与谓词不同，函数是**个体域之间**的映射。其不是一个谓词，但可以嵌入在谓词当中使用。

- 若 $P(x)$ 表示 x 是教师，$\text{dad}(x)$ 表示 x 的父亲，则 $P(\text{dad}(x))$ 表示x **的父亲是教师**。
- **张三的父亲和李四的哥哥是同事**可描述成 $\text{COLLEAGUE}(\text{dad}(\text{张三}), \text{brother}(\text{李四}))$，其中 $\text{COLLEAGUE}(x, y)$ 表示 x 和 y 是同事。

一般约定，函数用小写字母表示，而谓词用大写字母表示。

再回顾一下有关苏格拉底的推理:

1. 所有人都会死。
2. 苏格拉底是人。
3. 苏格拉底会死。

我们还没处理的点在于“**所有**”这个词，这个词衡量了个体的数量，也联系起了两个命题之间的关系。因此我们引入量词的概念。

定义 2 **[量词].**

表示个体词数量的关系词称为量词，一共有两种量词:

- 全称量词 $\forall x$，意味对**所有的**x。
- 存在量词 $\exists x$，意味着**存在一个**x。

例 3.

所有人都会死。

- “所有”即表示个体变元数量的词。
- 假设此时个体域为所有的人，令 $P(x)$ 表示 x 会死，则上述命题可以表示为：$\forall xP(x)$。

命题 $\forall xP(x)$

命题 $\forall xP(x)$ 为真，当且仅当对于论域中的**每一个**个体 x，$P(x)$ 都为真。

命题 $\forall xP(x)$ 为假，当且仅当**存在一个**个体 x_0，使得 $P(x_0)$ 为假。

$\forall x(P(x) \vee Q(x))$ 和 $\forall xP(x) \vee Q(x)$ 是否相等？

- **不相等**，量词的运算优先级高于逻辑联结词。

例 4.

有的人都会死。

- “有的”即表示个体变元数量的词。
- 假设此时个体域为所有的人，令 $P(x)$ 表示 x 会死，则上述命题可以表示为：$\exists x P(x)$。

命题 $\exists x P(x)$

命题 $\exists x P(x)$ 为真，当且仅当**存在一个**论域中的个体 x_0，$P(x_0)$ 为真。

命题 $\exists x P(x)$ 为假，当且仅当对于论域中的**每一个**个体 x，$P(x)$ 为假。

$\exists x(P(x) \wedge Q(x))$ 和 $\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$ 是否相等?

- **不相等**，后者可以使得 $P(x)$ 与 $Q(x)$ 成真的个体可以不相同。

量词实际上表示对变元的一种约束。

- $\forall x P(x)$ 中 $P(x)$ 的 x 收到了前面全称量词的约束，即 x 必须是论域中的每一个个体。我们称被量词约束的变元为约束变元。
- $P(x)$ 中的 x 则没有被任何量词所约束，因此我们称其是自由变元。

例 5.

在 $\forall x P(x) \vee Q(x)$ 中，红色 x 是约束变元，绿色 x 是自由变元。

量词的辖域

通过是否受到量词的影响，我们将变元分成了约束变元和自由变元。我们下面也要给出量词的作用范围。

定义 6 **[辖域].**

量词所约束的范围称为量词的辖域。

- $\forall x P(x, y)$ 中 $P(x, y)$ 是 $\forall x$ 的辖域。
- $\forall x P(x, y) \vee Q(x)$ 中 $P(x, y)$ 是 $\forall x$ 的辖域。
- $\exists x \forall y P(x, y)$ 中，$\exists x$ 的辖域为 $\forall y P(x, y)$，$\forall y$ 的辖域为 $P(x, y)$。

量词是否可以交换?

- $\forall x \forall y P(x, y)$ 和 $\forall y \forall x P(x, y)$ 是否相同? 是!
- $\exists x \exists y P(x, y)$ 和 $\exists y \exists x P(x, y)$ 是否相同? 是!
- $\forall x \exists y P(x, y)$ 和 $\exists y \forall x P(x, y)$ 是否相同? 不是!

变元易名的规则

- 对于公式 $\forall x P(x)$，将其中的 x 改为 y，则得到的公式是相同的。
  - $\forall x P(x) = \forall y P(y)$。
- 对于公式 $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x,y))$，将其中的 x 改为 y，则新得到的公式是不相同的。
  - $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x,y)) \neq \forall y(P(y) \rightarrow Q(y,y))$。

什么样的情况变元易名不会改变相应的公式?

- 不严谨地说，使用辖域内未曾出现的符号去替代对应的变元。

有限论域下的量词

由上述定义可以看到，论域的无限性导致了对带有量词的公式的真值判断变的困难。

当论域是有限的时候, 比如用 $\{1, \ldots, k\}$ 来表示，又有什么变化?

析取 $\vee$ 与合取 $\wedge$ 的拓展

- $\forall x P(x)$ 实际上表示得是 $P(1) \wedge P(2) \wedge \cdots \wedge P(k)$.
- $\exists x P(x)$ 实际上表示得是 $P(1) \vee P(2) \vee \cdots \vee P(k)$.

上海师范大学 Shanghai Normal University

用 0 元谓词符号化命题

- 墨西哥位于南美洲。
- 只有 2 是素数，4 才是素数。
- 如果 5 大于 4，则 4 大于 6。

1. 令 a 表示墨西哥，$F(x)$ 表示 x 位于南美洲，则命题可表示为 $F(a)$。
2. 令 $P(x)$ 表示 x 是素数，则命题可表示为 $P(2) \to P(4)$。
3. 令 $P(x, y)$ 表示 x 大于 y，则命题可表示为 $P(5, 4) \to P(4, 6)$.

带有量词的形式化

将下列命题分别在如下论域中进行符号化:

- 所有人都要吃饭。
- 有人用左手写字。

其中论域为:

1. 人类集合。
2. 全总个体域。

- 当论域为全体人类时:
  1. $\forall x P(x)$,其中 $P(x)$ 表示 x 要吃饭。
  2. $\exists x Q(x)$,其中 $Q(x)$ 表示 x 用左手写字。
- 当论域为全总个体域时:

  为什么第一个不能翻译成 $\forall x(M(x) \wedge P(x))$?

  1. $\forall x(M(x) \to P(x))$,其中 $P(x)$ 表示 x 要吃饭,$M(x)$ 表示 x 是人。
  2. $\exists x(M(x) \wedge Q(x))$,其中 $Q(x)$ 表示 x 用左手写字,$M(x)$ 表示 x 是人。

带有量词的形式化

请形式化下列命题：

- 没有无理数是有理数。

- 令 $P(x)$ 表示 x 是有理数，$Q(x)$ 表示 x 是无理数，则命题可表示为 $\neg(\exists x(P(x) \wedge Q(x)))$。

逻辑上不同的等价形式

事实上，上述命题也可以形式化成如下两个等价形式：

- $\forall x(P(x) \to \neg Q(x))$。
- $\forall x(Q(x) \to \neg P(x))$。

自然数集的形式描述 (I)

自然数集

我们可以用下面三句话作为公理定义出自然数集:

1. **对每个数，有且仅有一个相继后元。**
2. 0 **不是任何数的相继后元。**
3. **对除** 0 **以外的数，有且只有一个相继前元。**

现在请以论域是自然数集，形式化上述语句。

准备工作:

- 谓词 $E(x, y)$ 表示 $x = y$。
- 函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 分别表示 x 的相继后元和相继前元，即 $f(x) = x + 1$，$g(x) = x - 1$。
- 唯一性可以通过描述如果存在两个，则两个必相等来表示。

对每个数，有且仅有一个相继后元。

- $\forall x \exists y (E(f(x), y) \wedge (\forall z E(z, f(x)) \rightarrow E(y, z)))$。

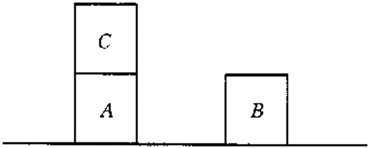
0 不是任何数的相继后元。

- $\neg \exists x E(0, f(x))$。

对除 0 以外的数，有且只有一个相继前元。

- $\forall x (\neg E(x, 0) \rightarrow \exists y (E(y, g(x)) \wedge \forall z (E(z, g(x)) \rightarrow E(z, y))))$。

如图所示:



定义如下谓词:

- $\mathrm{ON}(x, y)$: 表示 x 在 y 上。
- $\mathrm{CLEAR}(x)$: 表示 x 上没有积木。

则 CLEAR 和 ON 之间的关系可以表示成什么?

$$\forall x(\mathrm{CLEAR}(x) \to \neg \exists y \mathrm{ON}(y, x))$$

阶段总结

一阶逻辑的基本概念

- 命题逻辑的局限性。
- 个体词、谓词的基本概念。
- 量词的基本概念。
- 自然语言的形式化。

一阶逻辑的合式公式

命题逻辑的合式公式定义回顾

在讲述一阶逻辑的合式公式之前，首先先来回顾一下命题逻辑的合式公式的定义：

定义 7 **[命题公式].**

命题公式，又称命题逻辑的合式公式(Well Formed Formula)，由下述条件递归定义给出：

1. 命题常量和命题变元是命题公式，其也被称为原子命题公式。
2. 如果 p, q 是命题公式，则 $(\neg p)$，$(p \wedge q)$，$(p \vee q)$，$(p \to q)$，$(p \leftrightarrow q)$ 也是命题公式。
3. 所有命题公式都可以通过有限次的上述规则得出。

直观上来讲，似乎只要**补上对量词的构造**即可。

定义 8 **[一阶逻辑的公式定义？].**

一阶逻辑，或者谓词逻辑的合式公式(Well Formed Formula)，由下述条件递归定义给出：

1. 原子公式是合式公式。
2. 若 A, B 是合式公式，则 $(\neg A)$，$(A \wedge B)$，$(A \vee B)$，$(A \to B)$，$(A \leftrightarrow B)$ 也是合式公式。
3. 若 A 是合式公式，则 $\forall x A, \exists x A$ 也是合式公式。
4. 所有合式公式都可以通过有限次的上述规则得出。

但怎么定义一阶逻辑里的**原子公式**?

- 令 $P(x)$ 是一个谓词,f 是一个函数，显然：

$$P(x),\ P(f(x)),\ P(f(f(x))),\ \cdots$$

都是**不能由联结词和量词**产生的公式。

项的概念-字母表

上海师范大学 Shanghai Normal University

为了更准确的定义原子公式，我们需要引入项 (term) 的概念，首先我们介绍**字母表**。

定义 9 **[字母表 (Alphabet)].**

一阶逻辑 (一阶语言, First-order Langauge) 的字母表包含以下符号：

1. 个体变元：$x, y, z, \ldots$
2. 逻辑联结词：$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$
3. 量词：$\forall, \exists$
4. 标点符号：$(,),$,
5. 相等符号：$\equiv$
6.
   a. 常元：$a, b, c, \ldots$
   b. 函数符号：$f, g, h, \ldots$
   c. 关系符号 (谓词)：$P, Q, R, \ldots$

- 上述定义的 $1 \sim 5$ 称为逻辑符号，一般用 $\mathcal{A}$ 表示。这部分符号是不会变的。
- 第 6 条则是非逻辑符号，一般用 $\mathcal{S}$ 表示。$\mathcal{S}$ 可以为空，这部分符号是可以改变的。

因此不同的 $\mathcal{S}$ 可以定义不同的一阶语言。所以在有混淆时我们会称这是由$\mathcal{S}$ **定义出的一阶语言**。

定义 10 **[项].**

由符号集 $\mathcal{S}$ 定义出的 $\mathcal{A} \cup \mathcal{S}$ 上的项 (term) 由下述条件递归定义给出:

1. 个体变元是项。
2. 常元是项。
3. 若 f 是 n 元函数符号，$t_1, \ldots, t_n$ 是项，则 $f(t_1, \ldots, t_n)$ 是项。
4. 所有项都可以通过有限次的上述规则得出。

我们现在可以给出一阶逻辑的合式公式的定义了。

定义 11 **[一阶逻辑的公式定义].**

令 $\mathcal{S}$ 是一个符号集，则由 $\mathcal{S}$ 定义出的一阶逻辑，或者谓词逻辑的合式公式(Well Formed Formula)，由下述条件递归定义给出：

1. 如果 t_1 和 t_2 是项，则 $t_1 \equiv t_2$ 是合式公式。
2. 如果 $t_1, \ldots t_n$ 是项，R 是 n 元谓词，则 $R(t_1, \ldots, t_n)$ 是合式公式。
3. 若 A, B 是合式公式，则 $(\neg A)$，$(A \wedge B)$，$(A \vee B)$，$(A \rightarrow B)$，$(A \leftrightarrow B)$ 也是合式公式。
4. 若 A 是合式公式，则 $\forall x A, \exists x A$ 也是合式公式。
5. 所有合式公式都可以通过有限次的上述规则得出。

公式的 1 和 2 也被称为原子公式，因为其不由任何其他的合式公式构造而成。我们会使用 $\phi, \varphi, \ldots$ 等小写希腊字母表示一个公式。

为什么需要这么一个定义？

考察一个这样的例子，令 S 是个符号集，其包含一个常元 e 和一个运算符号 $+$，显然我们希望其定义出的一阶逻辑语言是类似下面这样的：

- $e \equiv e$。
- $e + x_1 \equiv x_2$。
- $\exists x_1 (e \equiv e \wedge x_1 \equiv x_2)$.

而不是：

- $\equiv \wedge e$.
- $e \vee e$
- $\cdots$.

变元和自由变元的严格定义

上海师范大学 Shanghai Normal University

我们现在也可以用严格的方式来定义出一个公式的变元和自由变元。令 $\mathrm{Var}(t)$ 和 $\mathrm{free}(\varphi)$ 分别表示对一个项和一个公式中的**变元**和**自由变元**的集合，则我们有：

- Var 的定义如下：
  1. $\mathrm{Var}(x) = \{x\}$。
  2. $\mathrm{Var}(a) = \emptyset$。
  3. $\mathrm{Var}(f(t_1, \ldots, t_n)) = \mathrm{Var}(t_1) \cup \cdots \cup \mathrm{Var}(t_n)$。
- free 的定义如下：
  1. $\mathrm{free}(t_1 \equiv t_2) = \mathrm{var}(t_1) \cup \mathrm{var}(t_2)$.
  2. $\mathrm{free}(P(t_1, \ldots, t_n)) = \mathrm{Var}(t_1) \cup \cdots \cup \mathrm{Var}(t_n)$.
  3. $\mathrm{free}(\neg\varphi) = \mathrm{free}(\varphi)$.
  4. $\mathrm{free}((\varphi * \phi)) = \mathrm{free}(\varphi) \cup \mathrm{free}(\phi)$，这里 $* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$.
  5. $\mathrm{free}(\forall x\varphi) = \mathrm{free}(\exists x\varphi) = \mathrm{free}(\varphi) \setminus \{x\}$.

我们将没有出现自由变元的合式公式称为是闭的。

现在假设我们由某个符号集 $\mathcal{S}$ 已经定义好了一个一阶语言里的的合式公式，比如：

$$\forall x(P(x) \to \exists y(Q(y) \land R(x, y)))$$

表示的是什么含义？

为了回答这个问题，我们需要引入**解释**的概念。

> **关于语法**
>
> 所谓语法 (syntax)，就是根据规则所构造出来的，如我们之前所阐述的，其没有任何意义，但显然胡乱定义出来的显然是是我们不希望的。

解释需要什么？

审视一下所定义的公式，我们有：

- 一个符号集 $\mathcal{S}$，其中包括常量符号，函数符号，关系符号。
- 变量符号。

所以一个解释需要解释清楚什么？

- 常量符号指代的是什么？
- 函数符号、关系符号指代的又是什么关系？
- 变量符号的范围是什么？自由变元的取值是什么？

关于语义

所谓语义 (semantics), 就是对语法所构造出来的公式进行解释，使其有意义。

解释的第一步-解决符号集的意义

为了解决符号集的意义，首先我们需要明确其在哪个范围内。

- 指定一个非空个体域 $\mathfrak{D}$。

有了论域 $\mathfrak{D}$ 后我们便可以对符号进行解释了，我们将其整体视作一个映射 $\mathfrak{a}$:

- 对于 $\mathcal{S}$ 中的每一个常量符号 a, $\mathfrak{a}(a)$表示 $\mathfrak{D}$ 中的一个元素。
- 对于 $\mathcal{S}$ 中的每一个 n 元函数符号 f, $\mathfrak{a}(f)$表示 $\mathfrak{D}^n$ 到 $\mathfrak{D}$ 的一个映射。
- 对于 $\mathcal{S}$ 中的每一个 n 元关系符号 R, $\mathfrak{a}(R)$表示 $\mathfrak{D}^n$ 到 $\{0, 1\}$ 的一个映射。

在有的书中，也将 $\mathfrak{A} = (\mathfrak{D}, \mathfrak{a})$ 称为一个 $\mathcal{S}$ 上的结构 $\mathfrak{A}$ ($\mathcal{S}$-structure)。

上海师范大学 Shanghai Normal University

这一步其实比较简单，我们只需要指定一个赋值函数即可。

- **赋值** σ: 对每一个变量符号 x，$\sigma(x)$表示 $\mathfrak{D}$ 中的一个元素。

注意到我们需要利用 σ 对公式中的自由变元进行解释，现在我们就有了对公式的一个完整解释。

定义 12 **[对公式的解释].**

对于 $\mathcal{S}$ 产生的一阶语言，对公式的解释由 $\mathfrak{J} = (\mathfrak{A}, \sigma)$ 组成。对于一个合式公式 φ，将其被 $\mathfrak{J}$ 替换得到的新公式记为 φ'，则称 φ' 是 φ 在 $\mathfrak{J}$ 下的解释。

在教材中，称 $\mathfrak{A}$ 为解释。

解释的例子 (I)

现在令符号集 $S = \{a, f, g, F\}$，变量符号集合为 $\{x, y, z\}$，一个对公式的解释 $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}(= (\mathcal{D}, \mathfrak{a})), \sigma)$ 定义如下：

- 个体域 $\mathcal{D}$ 定义为 $\mathbb{N}$。
- $\mathfrak{a}(a) = 0$。
- $\mathfrak{a}(f)(x, y) = x + y$，$\mathfrak{a}(g)(x, y) = x \cdot y$。
- $\mathfrak{a}(F)(x, y) = (x \equiv y)$。
- $\sigma(x) = 1$，$\sigma(y) = 2$，$\sigma(z) = 3$.

则在 $\mathfrak{I}$ 下

- $F(f(x, y), g(x, y))$ 的解释？ $(1 + 2 = 1 \times 2)$ 假命题。
- $F(f(x, a), y) \to F(g(x, y), z)$ 的解释？ $(1 + 0 = 2) \to (1 \times 2 = 3)$ 真命题。

解释的例子 (II)

- $\neg F(g(x,y),g(y,z))$ 的解释?

  $\neg(1\times 2\equiv 2\times 3)$　真命题。
- $\forall x F(g(x,y),z)$ 的解释?

  $\forall x\ x\cdot 2=3$　假命题。
- $\forall x\forall y(F(f(x,a),y)\rightarrow F(f(y,a),x))$ 的解释?

  $\forall x\forall y(x+0\equiv y\rightarrow y+0\equiv x)$　真命题。
- $\exists x F(f(x,x),g(x,x))$ 的解释?

  $\exists x\ x+x\equiv x\cdot x$　真命题。
- $\forall x\forall y F(x,y)\rightarrow \forall x\forall y F(x,y)$ 的解释?

  $\forall x\forall y x\equiv y\rightarrow \forall x\forall y\ x\equiv y$　真命题。

有没有可能在任何一个解释下，一个公式始终都是**真命题**?

定义 13.

设 φ 是一个公式，若对于任何对公式的解释 $\mathfrak{J}$，φ 均为真，则称 φ 是一个永真式 (逻辑有效式)；若对于任何对公式的解释 $\mathfrak{J}$，φ 均为假，则称 φ 是一个永假式；若至少存在一个对公式的解释 $\mathfrak{J}$ 下 φ 为真，则称 φ 是一个可满足式。

怎么去判断一个公式是永真式?

定义 14 [代换实例].

设 A 是含命题变项 $p_1, \ldots, p_n$ 的命题公式，$\varphi_1, \ldots \varphi_n$ 是 n 个谓词公式，用 φ_i 代替 A 中的 p_i，所得的公式 A' 称为 A 的代换实例。

定理 15.

1. 设 A 是一个永真式，A' 是 A 的代换实例，则 A' 也是永真式。
2. 设 A 是一个永假式，A' 是 A 的代换实例，则 A' 也是永假式。

- $p \to p$ 是永真式，从而 $\forall x \forall y F(x, y) \to \forall x \forall y F(x, y)$ 也是永真式。

可满足式的代换实例?

请注意，可满足式的代换实例不一定是可满足式，如:

- $\neg(\forall x F(x) \to \exists x F(x))$ 是 $\neg(p \to q)$ 的代换实例，但前者是永假式。

公式类型判断

请判断下列公式是什么类型的，并给与相应的证明。

1. $\varphi_1 = \forall x(F(x) \to G(x))$.
2. $\varphi_2 = \exists x(F(x) \wedge G(x, y))$.
3. $\varphi_3 = \forall x F(x) \to (\exists x \exists y G(x, y) \to \forall x F(x))$.
4. $\varphi_4 = \neg(\forall x F(x) \to \exists y G(y)) \wedge \exists y G(y)$。
5. $\varphi_5 = \forall x F(x) \to \exists x F(x)$.
6. $\varphi_6 = F(y) \to \exists x F(x)$.

1. $\varphi_1 = \forall x(F(x) \to G(x))$.

φ_1 是可满足式，考虑两个解释 $\mathfrak{I}_1, \mathfrak{I}_2$，其论域都是在 $\mathbb{R}$ 上，但:

- $\mathfrak{I}_1$ 将 $F(x)$ 定义为 x 是有理数，$G(x)$ 定义 x 为实数。
- $\mathfrak{I}_2$ 将 $F(x)$ 定义为 x 是有理数，$G(x)$ 定义 x 为无理数。

则 φ_1 在 $\mathfrak{I}_1$ 下为真，在 $\mathfrak{I}_2$ 下为假。

2. $\varphi_2 = \exists x(F(x) \wedge G(x, y))$.

φ_1 是可满足式，考虑两个解释 $\mathfrak{I}_1, \mathfrak{I}_2$，其论域都是在 $\mathbb{R}$ 上，但:

- $\mathfrak{I}_1$ 将 $F(x)$ 定义为 x 是自然数，$G(x, y)$ 定义 $x \equiv y$，自由变元 y 被赋值为 1。
- $\mathfrak{I}_2$ 将 $F(x)$ 定义为 x 是自然数，$G(x, y)$ 定义 $x \equiv y$，自由变元 y 被赋值为 -1。

则 φ_2 在 $\mathfrak{I}_1$ 下为真，在 $\mathfrak{I}_2$ 下为假。

3. $\varphi_3 = \forall x F(x) \to (\exists x \exists y G(x, y) \to \forall x F(x))$.

φ_3 是永真式，因为其是重言式 $p \to (q \to p)$ 的代换实例

4. $\varphi_4 = \neg(\forall x F(x) \to \exists y G(y)) \land \exists y G(y)$。

φ_4 是永假式，因为其是矛盾式 $\neg(p \to q) \land q$ 的代换实例

5. $\varphi_5 = \forall x F(x) \to \exists x F(x)$.

φ_5 是永真式，因为对于 φ_5 的任何一个解释 $\mathfrak{J}$，若 $\forall x F(x)$ 为真，其则对论域 $\mathfrak{D}$ 中任何一个元素 x 都有 $F(x)$ 为真，所以 $\exists x F(x)$ 为真，从而 φ_5 为真。

6. $\varphi_6 = F(y) \to \exists x F(x)$.

φ_6 是永真式，因为对于 φ_6 的任何一个解释 $\mathfrak{J}$，若其对 y 的赋值令 $F(a(y))$ 为真，则 $\exists x F(x)$ 为真，从而 φ_6 为真。

总结

本章总结

- 一阶逻辑的基本概念
  - 个体词、谓词、量词。
  - 自然语言的形式化。
- 一阶逻辑合式公式。
  - 项、合式公式的定义.
  - 解释的概念。
  - 公式类型。