《离散数学》

5-一阶逻辑 (II)(First-Order Logic(II))

杨启哲

上海师范大学信机学院计算机系

2024 年 10 月 3 日

一阶逻辑基本概念回顾

- 基本概念
  - 个体词、谓词、量词。
  - 自然语句的形式化。
- 一阶逻辑公式
  - 字符表、项的概念
  - 解释的概念

主要内容

- 一阶逻辑等值式
- 一阶逻辑的前束范式
- 一阶逻辑的推理

一阶逻辑等值式

如果没有特殊说明的话，我们讨论的公式都是**假定由符号集 $\mathfrak{S}$ 定义出来的一阶语言** $\mathscr{L}$.

与命题逻辑相同，我们引入等值式的概念。

定义 1 **[一阶逻辑的等值式].**

令 A, B 是两个一阶逻辑中的公式，称 A, B 是等值的，当且仅当对于任何一个对于公式的解释 A 和 B 都有相同的真值，记作 $A \Leftrightarrow B (A = B)$。

等值式的等价定义

令 A, B 是两个一阶逻辑中的公式，称 A, B 是等值的，当且仅当 $A \leftrightarrow B$ 是永真式 (普遍有效式)。

与命题逻辑不同的是，我们现在没有**真值表**这一手段来验证两个公式等值了！

命题逻辑等值式回顾 (I)

上海师范大学 Shanghai Normal University

命题逻辑等值公式

1. $\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$
2. $A \vee A \Leftrightarrow A,\ A \wedge A \Leftrightarrow A,\ A \to A \Leftrightarrow 1,\ A \leftrightarrow A \Leftrightarrow 1$
3. $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A,\ A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A,\ A \leftrightarrow B \Leftrightarrow B \leftrightarrow A$
4. $A\vee(B\vee C) \Leftrightarrow (A\vee B)\vee C,\ A\wedge(B\wedge C) \Leftrightarrow (A\wedge B)\wedge C,\ A \leftrightarrow (B \leftrightarrow C) \Leftrightarrow (A \leftrightarrow B) \leftrightarrow C$
5. $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C),\ A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

   $A \to (B \to C) \Leftrightarrow (A \to B) \to (A \to C)$
6. $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B,\ \neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B,\ \neg(A \to B) \Leftrightarrow A \wedge \neg B$

   $\neg(A \leftrightarrow B) \Leftrightarrow A \leftrightarrow \neg B \Leftrightarrow \neg A \leftrightarrow B$
7. $A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow A,\ A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow A$

命题逻辑等值式回顾 (II)

上海师范大学 Shanghai Normal University

命题逻辑等值公式

8. $A \vee 1 \Leftrightarrow 1,\ A \wedge 0 \Leftrightarrow 0,\ A \rightarrow 1 \Leftrightarrow 1,\ 0 \leftrightarrow A \Leftrightarrow 1$
9. $A \vee 0 \Leftrightarrow A,\ A \wedge 1 \Leftrightarrow A,\ 1 \rightarrow A \Leftrightarrow A,\ 1 \leftrightarrow A \Leftrightarrow A,\ A \rightarrow 0 \Leftrightarrow \neg A,\ 0 \leftrightarrow A \Leftrightarrow \neg A$
10. $A \vee \neg A \Leftrightarrow 1,\ A \wedge \neg A \Leftrightarrow 0,\ A \rightarrow \neg A \Leftrightarrow \neg A,\ A \leftrightarrow \neg A \Leftrightarrow 0$
11. $A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B$
12. $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$
13. $(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$
14. $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow \neg A \leftrightarrow \neg B$
15. $(A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow \neg B) \Leftrightarrow \neg A$
16. $\cdots$

在一阶逻辑公式中，原先命题逻辑公式的等值式依旧是**成立**的。

- 从原来的**命题变项**变成了**一阶语言中的公式**。

例 2.

下列公式都是等值的:

1. $P(x) \to Q(x) \Leftrightarrow (\neg P(x) \vee Q(x))$。
2. $\neg(P(x) \vee Q(x)) \Leftrightarrow (\neg P(x) \wedge \neg Q(x))$
3. $\neg\neg(\forall x P(x)) \Leftrightarrow \forall x P(x)$.
4. $(\forall x P(x) \wedge Q(y)) \vee \exists z R(z) \Leftrightarrow (\forall x P(x) \vee \exists z R(z)) \wedge (Q(y) \vee \exists z R(z))$

考察对带有量词的公式的否定:

- $\neg\forall x P(x) \Leftrightarrow \exists x \neg P(x)$.
- $\neg\exists x P(x) \Leftrightarrow \forall x \neg P(x)$.

对上述等值式的理解

- 形式上来看，$\neg$ 可以越过量词，但是量词需要进行变换。
- 从语义上理解，如 $\neg\forall x P(x)$ 表示的是“不是所有的 x 都满足 $P(x)$”，即“存在一个 x 不满足 $P(x)$”，即 $\exists x \neg P(x)$。

和德摩根律有点像?

假设现在的个体域是有限的，即 $\mathcal{D}=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，我们来证明上述等值式。

1. $\neg\forall x P(x) \Leftrightarrow \exists x \neg P(x)$.

$$\begin{aligned}\neg\forall x P(x) &\Leftrightarrow \neg(P(a_1)\wedge P(a_2)\wedge\cdots\wedge P(a_n))\\ &\Leftrightarrow \neg P(a_1)\vee\neg P(a_2)\vee\cdots\vee\neg P(a_n)\\ &\Leftrightarrow \exists x\neg P(x)\end{aligned}$$

2. $\neg\exists x P(x) \Leftrightarrow \forall x \neg P(x)$.

$$\begin{aligned}\neg\exists x P(x) &\Leftrightarrow \neg(P(a_1)\vee P(a_2)\vee\cdots\vee P(a_n))\\ &\Leftrightarrow \neg P(a_1)\wedge\neg P(a_2)\wedge\cdots\wedge\neg P(a_n)\\ &\Leftrightarrow \forall x\neg P(x)\end{aligned}$$

有限域下其实就是德摩根律!

我们只给出第一个证明，第二个的证明是几乎一样的。

$\neg\forall x P(x) \Leftrightarrow \exists x \neg P(x)$ **的证明.**

- 设对于公式的解释 $\mathfrak{I}$ 下我们有 $\neg\forall x P(x)$ 为真，从而 $\forall x P(x)$ 为假。即存在一个 $a_i \in \mathfrak{D}$ 使得 $P(a_i)$ 为假，从而 $\neg P(a_i)$ 为真。因此有 $\exists x \neg P(x)$ 为真。
- 反过来设对于公式的解释 $\mathfrak{I}$ 下我们有 $\exists x \neg P(x)$ 为真, 从而存在一个 $a_i \in \mathfrak{D}$ 使得 $\neg P(a_i)$ 为真，从而 $P(a_i)$ 为假。因此有 $\forall x P(x)$ 为假，从而 $\neg\forall x P(x)$ 为真。

$\square$

一些例子

1. 并非所有的动物都是猫。

   令 $A(x)$：x 是动物，$B(x)$：x 是猫，则该命题可以表示为：$\neg\forall x(A(x)\to B(x))$.

   并且我们有：

   $$\neg\forall x(A(x)\to B(x))\Leftrightarrow\exists x\neg(A(x)\to B(x))\Leftrightarrow\exists x(A(x)\wedge\neg B(x))$$

   $\exists x(A(x)\wedge\neg B(x))$ 表示存在一个动物不是猫，意思是等同的。

2. 天下乌鸦一般黑。

   令 $F(x)$：x 是乌鸦，$G(x,y)$：x和y 一般黑，则该命题可以表示为：

   $\forall x\forall y((F(x)\wedge F(y))\to G(x,y))$.

   并且我们有：

   $$\forall x\forall y((F(x)\wedge F(y))\to G(x,y))\Leftrightarrow\neg(\exists x\exists y((F(x)\wedge F(y))\wedge\neg G(x,y)))$$

   $\neg(\exists x\exists y((F(x)\wedge F(y))\wedge\neg G(x,y)))$ 表示不存在两只乌鸦一般黑，意思是等同的。

我们之前说过，下述公式都是不相等的：

- $\forall x(P(x) \vee \varphi)$ 与 $\forall x P(x) \vee \varphi$。
- $\exists x(P(x) \wedge \varphi)$ 与 $\exists x P(x) \wedge \varphi$。

但是当后半部分“φ”不包含该变元 x 时，上述公式则可以成立，我们将其称为量词分配的等值式。

量词对 $\wedge$, $\vee$ 的分配律

当公式 q 不包含变元 x 的时候，我们有：

1. $\forall x(P(x) \vee q) \Leftrightarrow \forall x P(x) \vee q$。
2. $\forall x(P(x) \wedge q) \Leftrightarrow \forall x P(x) \wedge q$。
3. $\exists x(P(x) \vee q) \Leftrightarrow \exists x P(x) \vee q$。
4. $\exists x(P(x) \wedge q) \Leftrightarrow \exists x P(x) \wedge q$。

对 $\wedge$, $\vee$ 分配律的证明

我们依旧只给出第一个证明，其余都是雷同的。

对 $\forall x(P(x) \vee q) \Leftrightarrow \forall x P(x) \vee q$ 的证明.

- 设在对公式的解释 $\mathfrak{J}$ 下，我们有 $\forall x(P(x) \vee q)$ 为真。则对于任何的 $a_i \in \mathfrak{D}$ 我们有 $P(a_i) \vee q$ 为真。
  - 若 q 为真，则 $\forall x P(x) \vee q$ 为真.
  - 若 q 为假，则 $P(x)$ 对于所有的 $a_i \in \mathfrak{D}$ 均为真，从而 $\forall x P(x)$ 为真

  因此 $\forall x P(x) \vee q$ 在对公式的解释 $\mathfrak{J}$ 下也为真。
- 设在对公式的解释 $\mathfrak{J}$ 下，我们有 $\forall x P(x) \vee q$ 为真。
  - 若 q 为真，则 $\forall x(P(x) \vee q)$ 为真.
  - 若 q 为假，则 $\forall x P(x)$ 为真，从而 $P(x)$ 对于所有的 $a_i \in \mathfrak{D}$ 均为真，从而 $P(a_i) \vee q$ 对于所有的 $a_i \in \mathfrak{D}$ 为真，从而 $\forall x(P(x) \vee q)$ 为真.

  因此 $\forall x(P(x) \vee q)$ 在对公式的解释 $\mathfrak{J}$ 下也为真。

$\square$

对 $\to$ 的分配律

显然，量词对 $\to$ 也有分配律。

量词对 $\to$ 的分配律

当公式 p, q 不包含变元 x 的时候，我们有：

1. $\forall x(P(x) \to q) \Leftrightarrow \exists x P(x) \to q$。
2. $\exists x(P(x) \to q) \Leftrightarrow \forall x P(x) \to q$。
3. $\forall x(p \to P(x)) \Leftrightarrow p \to \forall x P(x)$。
4. $\exists x(p \to P(x)) \Leftrightarrow p \to \exists x P(x)$。

我们依旧只给出第一个证明，其余都是雷同的。

对 $\forall x(P(x) \to q) \Leftrightarrow \exists x P(x) \to q$ 的证明.

- 设在对公式的解释 $\mathfrak{I}$ 下，我们有 $\forall x(P(x) \to q)$ 为真。则对于任何的 $a_i \in \mathfrak{D}$ 我们有 $P(a_i) \to q$ 为真。
  - 若存在 $P(a_i)$ 为真，则 $\exists x P(x)$ 和 q 均为真，即 $\exists x P(x) \to q$ 为真。
  - 若对所有的 a_i，$P(a_i)$ 均为假，则 $\exists x P(x)$ 为假，从而 $\exists x P(x) \to q$ 为真。

  因此 $\exists x P(x) \to q$ 在对公式的解释 $\mathfrak{I}$ 下也为真。
- 设在对公式的解释 $\mathfrak{I}$ 下，我们有 $\exists x P(x) \to q$ 为真。
  - 若 $\exists x P(x)$ 为真，则 q 为真，现在考察所有的 $a_i \in \mathfrak{D}$:
    - 若 $P(a_i)$ 为真，则 $P(a_i) \to q$ 为真。
    - 若 $P(a_i)$ 为假，则 $P(a_i) \to q$ 为真。

    从而 $\forall x(P(x) \to q)$ 为真。
  - 若 $\exists x P(x)$ 为假，则对于任意的 $a_i \in \mathfrak{D}$，$P(a_i)$ 为假，从而 $P(a_i) \to q$ 均为真。因此 $\forall x(P(x) \to q)$ 为真。

  因此 $\forall x(P(x) \to q)$ 在对公式的解释 $\mathfrak{I}$ 下也为真。

注意到 $\to$ 其实可以由 $\wedge$, $\vee$, $\neg$ 来表示，因此我们也可以使用**等值演算**的方式。

对 $\forall x(P(x) \to q) \Leftrightarrow \exists x P(x) \to q$ 的证明.

我们有：

$$
\begin{aligned}
\forall x(P(x) \to q) &\Leftrightarrow \forall x(\neg P(x) \vee q) && (p \to q \Leftrightarrow \neg p \vee q) \\
&\Leftrightarrow \neg\neg\forall x(\neg P(x) \vee q) && (\neg\neg p \Leftrightarrow p) \\
&\Leftrightarrow \neg\exists x\neg(\neg P(x) \vee q) && (\neg\forall x P(x) \Leftrightarrow \exists x\neg P(x)) \\
&\Leftrightarrow \neg\exists x(P(x) \wedge \neg q) && (\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q) \\
&\Leftrightarrow \neg(\exists x P(x) \wedge \neg q) && (\exists x(P(x) \wedge q) \Leftrightarrow \exists x P(x) \wedge q) \\
&\Leftrightarrow \neg(\exists x P(x)) \vee q && (\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q) \\
&\Leftrightarrow (\exists x P(x)) \to q && (p \to q \Leftrightarrow \neg p \vee q)
\end{aligned}
$$

$\square$

一般情况下的分配律:$\forall$ 对 $\wedge$, $\exists$ 对 $\vee$

上海师范大学 Shanghai Normal University

当量词约束变元同时存在于两个公式的时候，我们依旧存在一些分配律:

- $\forall$ 对 $\wedge$: $\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \Leftrightarrow \forall xP(x) \wedge \forall xQ(x)$。
- $\exists$ 对 $\vee$: $\exists x(P(x) \vee Q(x)) \Leftrightarrow \exists xP(x) \vee \exists xQ(x)$。

注意：另外两个分配律则不成立!

这种情况下，$\forall$ 对 $\wedge$, $\exists$ 对 $\vee$ 没有分配律，即:

- $\forall x(P(x) \vee Q(x)) \not\Leftrightarrow \exists xP(x) \vee \forall xQ(x)$。
- $\exists x(P(x) \wedge Q(x)) \not\Leftrightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xQ(x)$。

直观上的解释

事实上，$\forall$ 可以看作是对 $\wedge$ 的推广，$\exists$ 是对 $\vee$ 的推广。所以上述规律实际上是 $\vee$, $\wedge$ 交换律的推广。但当 $\vee$ 和 $\wedge$ 交替的时候，其是不能交换的。

一般情况下分配律的证明

我们依旧只给出第一个证明，另外一个是雷同的。

对 $\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \Leftrightarrow \forall xP(x) \wedge \forall xQ(x)$ 的证明.

- 假设对于一个公式的解释 $\mathfrak{I}$ 下 $\forall x(P(x) \wedge Q(x))$ 为真。则对于任何的 $a_i \in \mathfrak{D}$ 我们有 $P(a_i) \wedge Q(a_i)$ 为真。从而 $P(a_i)$ 为真，$Q(a_i)$ 为真。因此 $\forall xP(x)$ 和 $\forall xQ(x)$ 均为真。因此 $\forall xP(x) \wedge \forall xQ(x)$ 在解释 $\mathfrak{I}$ 下也为真。
- 假设对于一个公式的解释 $\mathfrak{I}$ 下 $\forall xP(x) \wedge \forall xQ(x)$ 为真。则 $\forall xP(x)$ 和 $\forall xQ(x)$ 在该解释下均为真，即对于任何的 $a_i \in \mathfrak{D}$，$P(a_i)$ 和 $Q(a_i)$ 均为真。因此 $P(a_i) \wedge Q(a_i)$ 为真，从而 $\forall x(P(x) \wedge Q(x))$ 在解释 $\mathfrak{I}$ 下也为真。

$\square$

$\forall$ 对 $\vee$、$\exists$ 对 $\wedge$ 不成立的理解 (I)

前面我们直观的介绍了上述不成立的原因，现在我们从有限域 $\mathcal{D}_0 = \{1, 2\}$ 上给出一个严格的证明。

证明 $\forall x(P(x) \vee Q(x)) \not\Leftrightarrow \forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$.

我们有:

$$\begin{aligned}\forall x(P(x) \vee Q(x)) &\Leftrightarrow (P(1) \vee Q(1)) \wedge (P(2) \vee Q(2)) \\ &\Leftrightarrow (P(1) \wedge P(2)) \vee (P(1) \wedge Q(2)) \vee (Q(1) \wedge P(2)) \vee (Q(1) \wedge Q(2))\end{aligned}$$

而

$$\forall x P(x) \vee \forall x Q(x) \Leftrightarrow (P(1) \wedge P(2)) \vee (Q(1) \wedge Q(2))$$

因此：$\forall x(P(x) \vee Q(x)) \not\Leftrightarrow \forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$ □

从上述证明可以得到一个简单的推论：

- 在有限域 $\mathcal{D}_0 = \{1, 2\}$ 中我们有 $\forall x P(x) \vee \forall x Q(x) \Rightarrow \forall x(P(x) \vee Q(x))$，这里 $\Rightarrow$ 表示如果前者为真则后者也为真。

事实上这一结论对任意论域都是成立的，并且类似的结论对于 $\exists$ 对 $\wedge$ 也是成立的，即：

- $\forall x P(x) \vee \forall x Q(x) \Rightarrow \forall x(P(x) \vee Q(x))$。
- $\exists x(P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow \exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$。

消去量词

从上述例子我们也可以看到，在论域是有限的情况下，我们可以通过 $\vee, \exists$ 把量词消去。

上海师范大学 Shanghai Normal University

之前我们就提到过像 $\forall x P(x)$ 与 $\forall y P(y)$ 是等值的，也就是说，一些约束变元的名字是可以随意更改的。这一规则我们称为**换名规则**。

定义 3 **[换名规则].**

令 A 是一个公式，若 x 是一个约束变元，y 是一个**不在** A **中出现的自由变元**，则 A 与 $A(\frac{y}{x})$ 等值，其中 $A(\frac{y}{x})$ 表示将 A 中约束 x 的量词辖域内的所有 x 替换成 y 得到的公式。

直观解释

直观上来说，我们可以将约束变元的名字随意更改，只要保证其不与其他的变元起冲突，就不影响公式的真值。

例 4.

考察如下公式:

- $\forall x F(x,y,z) \to \exists y G(x,y,z)$。
- $\forall x (F(x,y) \to \exists y G(x,y,z))$

通过上述的换名规则，我们可以将其转换为如下等值的公式:

- $\forall t F(t,y,z) \to \exists w G(x,w,z)$。
- $\forall x (F(x,y) \to \exists w G(x,w,z))$

即通过上述的规则我们可以使得一个公式里面的变元**要么是自由变元，要么是约束变元**。

最后我们给出两个一阶逻辑中等值演算的例子。

证明： $\neg\exists x(M(x)\land F(x)) \Leftrightarrow \forall x(M(x)\to\neg F(x))$

证明. 我们有：

$$
\begin{aligned}
\neg\exists x(M(x)\land F(x)) &\Leftrightarrow \forall x\neg(M(x)\land F(x)) && (\neg\exists xP(x)\Leftrightarrow\forall x\neg P(x))\\
&\Leftrightarrow \forall x(\neg M(x)\lor\neg F(x)) && (\text{De Morgan 律})\\
&\Leftrightarrow \forall x(M(x)\to\neg F(x)) && (p\to q\Leftrightarrow\neg p\lor q)
\end{aligned}
$$

□

证明： $\neg\forall x\forall y(F(x)\wedge G(y)\rightarrow H(x,y))\Leftrightarrow\exists x\exists y(F(x)\wedge G(y)\wedge\neg H(x,y))$

证明. 我们有：

$$
\begin{aligned}
\neg\forall x\forall y(F(x)\wedge G(y)\rightarrow H(x,y)) &\Leftrightarrow \exists x\neg\forall y(F(x)\wedge G(y)\rightarrow H(x,y)) \\
&\qquad\qquad (\neg\forall xP(x)\Leftrightarrow\exists x\neg P(x)) \\
&\Leftrightarrow \exists x\exists y\neg(F(x)\wedge G(y)\rightarrow H(x,y)) \\
&\qquad\qquad (\neg\forall yP(y)\Leftrightarrow\exists y\neg P(y)) \\
&\Leftrightarrow \exists x\exists y\neg(\neg(F(x)\wedge G(y))\vee H(x,y)) \\
&\qquad\qquad (p\rightarrow q\Leftrightarrow\neg p\vee q) \\
&\Leftrightarrow \exists x\exists y(F(x)\wedge G(y)\wedge\neg H(x,y)) \qquad (\text{De Morgan 律})
\end{aligned}
$$

□

一阶逻辑的前束范式

我们在命题逻辑中介绍了命题逻辑公式的范式-合取范式和析取范式。

范式是一种统一的表达形式，可以用来研究公式的性质。

- 在命题逻辑公式中，如果两个公式是等值的，则它们形成的析取范式 (合取范式) 也是等值的。
- 在命题逻辑公式中，如果两个公式是等值的，则它们形成的主析取范式 (主合取范式) 是完全一样的。

在一阶逻辑中，我们也有**类似的范式概念**。

我们来介绍最常用的一种范式：**前束范式**。

定义 5 **[一阶逻辑的前束范式].**

具有如下形式的公式称为一阶逻辑的前束范式：

$$Q_1x_1Q_2x_2\cdots Q_nx_n\varphi$$

这里 Q_i 是一个量词 $\forall,\exists$。φ 是一个不含有量词的公式。

直观理解

前束范式的直观理解是：量词全部出现在公式的**最前面**，且量词的辖域包含整个公式。

例 6.

下述式子**都是**前束范式:

1. $\forall x \forall y (F(x) \wedge G(y) \rightarrow H(x, y))$.
2. $\forall x \forall y \exists z ((F(x) \wedge G(y) \wedge H(z)) \rightarrow L(x, z))$.

下述式子**不是**前束范式:

1. $\forall x G(x) \rightarrow \exists y F(x, y)$.
2. $\forall x \exists y (F(x) \rightarrow G(y)) \rightarrow \exists z G(z)$.

定理 7 **[前束范式存在定理].**

任何一阶逻辑公式都可以转换成等值的前束范式。

前束范式的求法

简单来说，求前束范式需要做如下几件事：

1. ¬ 往右移。
2. ∀, ∃ 往左移。
3. 变元换成合适的名字。

我们用一个例子来展示前束范式怎么求。

求 $\neg(\forall x \exists y P(a,x,y) \rightarrow \exists x(\neg \forall y Q(y,b) \rightarrow R(x)))$ 的前束范式

1. 消去 $\rightarrow, \leftrightarrow$ （非必需）
   - $\Leftrightarrow \neg(\neg(\forall x \exists y P(a,x,y)) \vee \exists x(\neg\neg \forall y Q(y,b) \vee R(x)))$
2. $\neg$ 往右移。
   - $\Leftrightarrow \neg(\exists x \forall y \neg P(a,x,y)) \vee \exists x(\forall y Q(y,b) \vee R(x))$
   - $\Leftrightarrow (\neg \exists x \forall y \neg P(a,x,y)) \wedge \neg \exists x(\forall y Q(y,b) \vee R(x))$
   - $\Leftrightarrow \forall x \exists y P(a,x,y) \wedge \forall x(\exists y \neg Q(y,b) \wedge \neg R(x))$
3. $\forall$, $\exists$ 往左移 ” + ” 变元易名。
   - $\Leftrightarrow \forall x(\exists y P(a,x,y) \wedge (\exists y \neg Q(y,b) \wedge \neg R(x)))$
   - $\Leftrightarrow \forall x(\exists y P(a,x,y) \wedge (\exists z \neg Q(z,b) \wedge \neg R(x)))$
   - $\Leftrightarrow \forall x \exists y \exists z(P(a,x,y) \wedge \neg Q(z,b) \wedge \neg R(x))$
   - $\Leftrightarrow \forall x \exists y \exists z S(a,b,x,y,z)$

最后的 $S(a,b,x,y,z)$ 可以视作是 $(P(a,x,y) \wedge \neg Q(z,b) \wedge \neg R(x))$ 的一个概括表示。

其他的范式

前束范式只要求了量词出现在公式的最前面，但是并**没有要求量词之间的顺序**。因此事实上我们也可以定义出更严格的范式，如：

- 只有全称量词的范式 (Skolem **标准形**)。
- 所有全称量词都在存在量词左面的范式。
- 所有存在量词都在全称量词左面的范式。

但遗憾的是，这种形式的转换不能完全的**保证等值性**。比如 Skolem **标准形**只能保证在**不可满足**的意义下是一致的，即如果原来的公式是不可满足的则其 Skolem 标准形也是不可满足的。

在范式的最后我们介绍一下Skolem **标准形**，其能保证如果原来公式是**不可满足的**，则其Skolem **标准形**也是不可满足的。这样的转换在归结法中有着重要的应用。

其核心的想法是，考虑如下的形式：

$$\forall x \forall y \exists z \exists w \cdots$$

从语义上理解，表示为对任意的 x 和对于任意的 y，存在一个 z 和存在一个 w，因此 z 和 w 可以视作是依赖于 x, y 的，因此我们可以可以将 z 和 w 的选取认为是一个依赖于 x, y 的函数. 即可以用$f(x, y)$和$g(x, y)$表示。

依照这个思路，我们可以将一个公式转换成 Skolem 标准形。

求一个公式的 Skolem 标准形首先需要求出其前束范式，假设已经求好如下:

$$\exists x\forall y\forall z\exists w\forall u\exists v P(x, y, z, w, u, v)$$

我们从左往右审视所有的存在量词:

- $\exists x$ 左边没有量词，因此我们直接用论域 $\mathcal{D}$ 中的一个未在公式出现过的常元a去替代。
- $\exists w$ 左边存在 2 个全称量词 $\forall y$，$\forall z$，所以用一个关于 y, z 的二元函数$f(y, z)$代替 w。
- $\exists v$ 左边存在 3 个全称量词 $\forall y$，$\forall z$，$\forall u$，所以用一个关于 y, z, u 的三元函数$g(y, z, u)$代替 w。

从而其 Skolem 标准形为:

$$\forall y\forall z\forall u P(a, y, z, f(y, z), u, g(y, z, u))$$

一个公式和其 Skolem 标准形不等值!

一阶逻辑的推理

上海师范大学 Shanghai Normal University

与命题逻辑相同，我们可以给出类似的推理形式。

- **推理形式：** 由前提 $A_1, \ldots A_n$ 推出 B 的推理形式为：

$$\{A_1, \ldots, A_n\} \vdash B.$$

  也用 $A_1 \wedge \cdots \wedge A_n \to B$ 表示。

- **正确推理：** 如果 $A_1 \wedge \cdot \wedge A_n \to B$ 是永真的，则由前提 $A_1, \ldots A_n$ 推出 B 的推理是正确的，记为：

$$\{A_1, \ldots, A_n\} \vDash B.$$

  也用 $A_1 \wedge \cdots \wedge A_n \Rightarrow B$ 表示。

例 8.

考察下列推理:

所有的整数都是有理数,所有的有理数都是实数,所以所有的整数都是实数 .

首先将其符号化,令 $P(x)$ 表示 x 是实数,$Q(x)$ 表示 x 是有理数,$R(x)$ 是整数,则:

- 所有的整数是有理数:$\forall x(R(x) \to Q(x))$。
- 所有的有理数是实数:$\forall x(Q(x) \to P(x))$。
- 所有的整数是实数:$\forall x(R(x) \to P(x))$。

因此其推理形式为:

$$\{\forall x(R(x) \to Q(x)), \forall x(Q(x) \to P(x))\} \vdash \forall x(R(x) \to P(x))$$

很显然,上述推理是**命题逻辑**所不能处理的。

上海师范大学 Shanghai Normal University

由代换实例，原先命题逻辑推理里的定律都是成立的。

推理定律 (I)

以下推理定律依旧正确，将其中的 A 和 B 换成一阶公式即可。

- $A \Rightarrow (A \vee B)$(附加律).
- $A \wedge B \Rightarrow A$(化简律).
- $(A \to B) \wedge A \Rightarrow B$(假言推理律).
- $(A \to B) \wedge \neg B \Rightarrow \neg A$(拒取式)
- $(A \vee B) \wedge \neg B \Rightarrow A$(析取三段论).
- $(A \to B) \wedge (B \to C) \Rightarrow A \to C$(假言三段论)
- $(A \leftrightarrow B) \wedge (B \leftrightarrow C) \Rightarrow A \leftrightarrow C$(等价三段论)
- $\dots$

推理定律实际上就是**蕴含式的永真式**，因此由前面的讨论，还存在如下的推理定律：

推理定律 (II)

- $\forall x P(x) \vee \forall x Q(x) \Rightarrow \forall x (P(x) \vee Q(x))$
- $\exists x (P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow \exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$
- $\forall x (P(x) \to Q(x)) \Rightarrow \forall x P(x) \to \forall x Q(x)$
- $\forall x (P(x) \to Q(x)) \Rightarrow \exists x P(x) \to \exists x Q(x)$
- $\forall x (P(x) \to Q(x)) \wedge \forall x (Q(x) \to R(x)) \Rightarrow \forall x (P(x) \to Q(x))$
- $\forall x (P(x) \to Q(x)) \to Q(x)) \wedge P(a) \Rightarrow Q(a)$
- $\exists x \forall y P(x, y) \Rightarrow \forall y \exists P(x, y)$

相应的一阶逻辑系统里面，我们也有**证明**，也即所谓的演绎推理。

我们下面来介绍以一阶语言 $\mathscr{L}$ 为基础的自然推理系统 $\mathrm{P}_{\mathscr{L}}$，其包括：

- 字母表即为 $\mathscr{L}$ 中的符号表 $\mathfrak{S}$。
- 所有的合式公式即为 $\mathscr{L}$ 中的合式公式。
- 自然推理系统 P 的推理规则依旧存在。
- 没有公理规则。

关于 $\mathrm{P}_{\mathscr{L}}$

- $\mathrm{P}_{\mathscr{L}}$ 的头两部分构成了构造一阶公式的语法，其是定义在一阶语言 $\mathscr{L}$ 上的。
- 为了处理量词，我们需要引入新的推理规则。

上海师范大学 Shanghai Normal University

我们现在来介绍量词的推理规则，令 $\Gamma = \{A_1, \ldots, A_n\}$ 表示前提的集合。

- 全称量词消去规则 $\forall_-$

$$\begin{array}{c} \Gamma \\ \forall x A(x) \\ \hline \therefore \quad A(y) \end{array}, \qquad \begin{array}{c} \Gamma \\ \forall x A(x) \\ \hline \therefore \quad A(c) \end{array}$$

其中 y 是变元符号，c 是常量符号，并且 x 不出现在 $A(x)$ 中 $\exists y$, $\forall y$ 的辖域内。

- 全称量词引入规则 $\forall_+$

$$\begin{array}{c} \Gamma \\ A(y) \\ \hline \therefore \quad \forall x A(x) \end{array}$$

其中 y 是不在 Γ 中出现的自由变元，并且我们假定 x 在 $A(y)$ 中不作约束变元出现。

存在量词的推理规则

- 存在量词消去规则 $\exists_-$

$$\begin{array}{ll} & \Gamma \\ & \exists x A(x) \\ \hline \therefore & A(c) \end{array}$$

其中 c 是常量符号，$A(x)$ 除 x 外没有其他自由变元也不包含个体常项 c。

- 存在量词引入规则 $\exists_+$

$$\begin{array}{ll} & \Gamma \\ & A(c) \\ \hline \therefore & \exists x A(x) \end{array}$$

其中 c 是常量符号，c 不出现在 $A(x)$ 中。

直观上来讲，上述规则想表示的是两点:

- 全称量词要求对**所有的**都成立。
- 存在量词要求**存在**一个成立。

但由于引入了新的符号 (变量或者常量)，因此如果不仔细处理，可能会导致一些问题。

- 假设个体域是实数集 $\mathbb{R}$，考察 $A(x) \stackrel{\text{def}}{=} x > c$，$c$ 是某个实数。则 $\exists x A(x)$ 是成立的，但显然 $A(c)$ 是不成立的。
- 假设个体域是实数集 $\mathbb{R}$，考察 $P(y) \stackrel{\text{def}}{=} \exists x\ x > y$，其是成立的，但是 $\forall x P(x) = \forall x \exists x\ x > x$ 是不成立的。

替换的原则

能够替换的原则就在于，对于 $\forall$ 来说，我们不能使用特定的变元引入全称量词，而对于 $\exists$ 来说，我们不能用特定的常量来消去存在量词。

存在量词推理规则的等价形式

下述表达其实也是两个规则的等价形式：

- 存在量词消去规则 $\exists_-$

$$\frac{\begin{array}{r}\Gamma\\ \exists x A(x)\\ A(y)\to B\end{array}}{\therefore \quad B}, \qquad \frac{\begin{array}{r}\Gamma\\ \exists x A(x)\\ A(c)\to B\end{array}}{\therefore \quad B}$$

其中 c 是常量符号，x, y 是变元符号，并且 c 不出现、y 不自由出现在 Γ 和 $A(x)$ 和 B 里。

- 存在量词引入规则 $\exists_+$

$$\frac{\begin{array}{r}\Gamma\\ B\to A(y)\end{array}}{\therefore B\to \exists x A(x)}, \qquad \frac{\begin{array}{r}\Gamma\\ B\to A(c)\end{array}}{\therefore B\to \exists x A(x)}$$

其中 c 是常量符号，x, y 是变元符号，并且 c 不出现、y 不自由出现在 Γ 和 $A(x)$ 和 B 中 $\forall x$, $\exists x$ 的辖域里。

例 9.

下述推理错在哪?

- 由前提 $\forall x(P(x) \to Q(x))$, $P(x)$ 推出结论 $\forall x Q(x)$:
  1. $\forall x(P(x) \to Q(x))$ 前提引入
  2. $P(x) \to Q(x)$ $\forall_-$
  3. $P(x)$ 前提引入
  4. $Q(x)$ $\to$ 消去
  5. $\forall x Q(x)$ $\forall_+$

  考察如下的解释 $\mathfrak{I} = ((\mathbb{R}, \mathfrak{a}), \sigma)$, 其中 $\mathfrak{a}(P)(x) : x$ 是偶数, $\mathfrak{a}(Q)(x) : x$ 被 2 整除, $\sigma(x) = 2$。则 $\forall x(P(x) \to Q(x))$ 和 $P(x)$ 都为真, 但是 $\forall x Q(x)$ 为假。

  错误原因? x 是前提出现过的自由变量! 它不是任意的!

例 10.

- 由前提 $\forall x(P(x) \to Q(x))$, $\forall x(Q(x) \to R(x))$ 推出结论 $\forall x(P(x) \to R(x))$:

1. $\forall x(P(x) \to Q(x))$ 前提引入
2. $P(x) \to Q(x)$ $\forall_-$
3. $\forall x(Q(x) \to R(x))$ 前提引入
4. $Q(x) \to R(x)$ $\forall_-$
5. $P(x) \to R(x)$ $p \to q,\ q \to r \Rightarrow p \to r$
6. $\forall x(P(x) \to R(x))$ $\forall_+$

正确推理举例

例 11.

- 由前提 $\forall x(P(x) \to Q(x))$, $\exists x(P(x) \land R(x))$ 推出结论 $\exists x(Q(x) \land R(x))$:

1.	$\forall x(P(x) \to Q(x))$	前提引入
2.	$P(x) \to Q(x)$	$\forall_-$
3.	$\neg P(x) \lor Q(x)$	
4.	$\neg P(x) \lor Q(x) \lor \neg R(x)$	
5.	$(\neg P(x) \lor \neg R(x)) \lor Q(x)$	
6.	$(P(x) \land R(x)) \to Q(x)$	
7.	$(P(x) \land R(x)) \to R(x)$	
8.	$(P(x) \land R(x)) \to (Q(x) \land R(x))$	
9.	$(P(x) \land R(x)) \to \exists x(Q(x) \land R(x))$	$\exists_+$
10.	$\exists x(P(x) \land R(x))$	前提引入
11.	$\exists x(Q(x) \land R(x))$	$\exists_-$

本章总结

- 一阶逻辑的等值演算
    - 带量词的等值公式。
- 一阶逻辑的范式。
    - 前束范式、Skolem 标准形。
- 一阶逻辑推理系统。
    - 量词推理规则.