

## 第一次作业-solution

Lecturer: 杨启哲

Last modified: 2025 年 2 月 25 日

1. 请判断下列语句哪些是命题？在是命题的句子中，哪些是简单命题？真命题？哪些命题的真值还不知道？

- (1) 9 是合数的充要条件是它是奇数。
- (2) 张三和李四是同学。
- (3)  $2x + 3 < 5$ ，其中  $x$  是任意实数。
- (4) 对于任意实数  $x$ ， $2x + 3 < 5$ 。
- (5) 你去图书馆么？
- (6) 2024 赛季英超冠军是切尔西。
- (7) 吸烟请到吸烟室去。

解答.

- 命题：(1)(2)(4)(6)。
- 简单命题：(2)(4)(6)。
- 真命题 (1)
- 不知道真值的命题：(6)。

□

## 注 0.1

对于命题 (2)，我们只需要知道其是一个简单命题就可以了，不需要关注其真值，当然你认为这是真命题也是没有关系的。

2. 当  $p, q$  的真值为 0， $r$  的真值为 1 时，求下列公式的真值。

- (1)  $p \vee (q \wedge r)$ .
- (2)  $(p \leftrightarrow r) \wedge (\neg q \vee p)$ .
- (3)  $(\neg r \wedge q) \rightarrow (p \wedge \neg q)$ .

解答. 当  $p = q = 0$ ， $r = 1$  时：

- $p \vee (q \wedge r)$  的真值为 0。
- $(p \leftrightarrow r) \wedge (\neg q \vee p)$  的真值为 0。

- $(\neg r \wedge q) \rightarrow (p \wedge \neg q)$  的真值为 1。

□

3. 将下列命题符号化。

- (1) 2 是素数。
- (2) 不但  $\pi$  是无理数，而且自然对数的底  $e$  也是无理数。
- (3) 3 是偶素数。
- (4) 这学期，小明只能学英语或者日语中的一门外语课。
- (5) 除非  $2 < 1$ ，否则  $3 < 2$ 。
- (6) 只有李老师上课，小明才来听课。
- (7) 火车比轮船快。
- (8) 飞机比火车快。

#### 注 0.2

思考一下，火车比轮船快和飞机比火车快这两个命题的符号化是不是有缺陷？直观上来说，我们应该可以得到飞机比轮船快的结论，但是从符号化的角度来说我们似乎没法用这两个命题来表示飞机比轮船快；而这就是命题逻辑的局限性。

解答. 我们可以将其符号化如下：

- (1) 令  $p$ : 2 是素数。则该命题表示为  $p$ (真)。
- (2) 令  $p$ :  $\pi$  是无理数， $q$ :  $e$  是无理数。则该命题表示为  $p \wedge q$ (真)。
- (3) 令  $p$ : 3 是偶数， $q$ : 3 是素数。则该命题表示为  $p \wedge q$ (假)。
- (4) 令  $p$ : 这学期小明学英语， $q$ : 这学期小明学日语。则该命题表示为  $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)(-)$ 。
- (5) 令  $p$ :  $2 < 1$ ， $q$ :  $3 < 2$ 。则该命题表示为  $\neg p \rightarrow q$  或者  $\neg q \rightarrow p$ (真)。
- (6) 令  $p$ : 李老师上课， $q$ : 小明来听课。则该命题表示为  $q \rightarrow p$ (未知)。
- (7) 令  $p$ : 火车比轮船快。则该命题表示为  $p(-)$ 。
- (8) 令  $p$ : 飞机比火车快。则该命题表示为  $p(-)$ 。

□

#### 注 0.3

- (1) 第 4 题需要注意的是，这里的“只能”是指“只能选择一门”，因此需要排除两个都拿的情况，即两个都拿时真值需要为假。
- (2) 第 5 题和第 6 题其实都可以从充分和必要条件上来理解，以最后一句为例。只有李老师上课，小明才来听课。说明小明来听课的必要条件是李老师上课，从而为  $q \rightarrow p$ 。另一方面从真值来看，如果转换为  $p \rightarrow q$ ，则蕴含了李老师来上课小明就一定来听课的意思，这是与原句不符的。

(3) 标注  $(-)$  这个的意思是，真假都是可以的，不用过多关注其真假，而是要求在怎么符号化。

4. 用真值表判断下列公式的类型，并指出它们的成真赋值和成假赋值。

(1)  $((p \wedge q) \rightarrow p) \vee r$ .

(2)  $((p \rightarrow r) \wedge q) \rightarrow (p \rightarrow r)$ .

(3)  $(\neg(q \rightarrow p)) \wedge p \wedge r$ .

**解答.** 这里只列出真值表最后一项：

(1)  $((p \wedge q) \rightarrow p) \vee r$  为重言式，所有赋值都是成真赋值。

| p | q | r | $((p \wedge q) \rightarrow p) \vee r$ |
|---|---|---|---------------------------------------|
| 0 | 0 | 0 | 1                                     |
| 0 | 0 | 1 | 1                                     |
| 0 | 1 | 0 | 1                                     |
| 0 | 1 | 1 | 1                                     |
| 1 | 0 | 0 | 1                                     |
| 1 | 0 | 1 | 1                                     |
| 1 | 1 | 0 | 1                                     |
| 1 | 1 | 1 | 1                                     |

(2)  $((p \rightarrow r) \wedge q) \rightarrow (p \rightarrow r)$  为重言式，所有赋值都是成真赋值。

| p | q | r | $((p \rightarrow r) \wedge q) \rightarrow (p \rightarrow r)$ |
|---|---|---|--------------------------------------------------------------|
| 0 | 0 | 0 | 1                                                            |
| 0 | 0 | 1 | 1                                                            |
| 0 | 1 | 0 | 1                                                            |
| 0 | 1 | 1 | 1                                                            |
| 1 | 0 | 0 | 1                                                            |
| 1 | 0 | 1 | 1                                                            |
| 1 | 1 | 0 | 1                                                            |
| 1 | 1 | 1 | 1                                                            |

(3)  $(\neg(q \rightarrow p)) \wedge p \wedge r$  为矛盾式，所有赋值都是成假赋值。

| p | q | r | $(\neg(q \rightarrow p)) \wedge p \wedge r$ |
|---|---|---|---------------------------------------------|
| 0 | 0 | 0 | 0                                           |
| 0 | 0 | 1 | 0                                           |
| 0 | 1 | 0 | 0                                           |
| 0 | 1 | 1 | 0                                           |
| 1 | 0 | 0 | 0                                           |
| 1 | 0 | 1 | 0                                           |
| 1 | 1 | 0 | 0                                           |
| 1 | 1 | 1 | 0                                           |

□

5. 这是一个技术上的手段，我们来证明一些公式是重言式。

(1) 用真值表的方法证明  $P \rightarrow (Q \rightarrow P)$  是重言式。

(2) 运用第一问的结论，利用代入规则来证明下列公式：

$$(A \rightarrow B) \rightarrow (((A \wedge D) \rightarrow (\neg B \vee C)) \rightarrow (A \rightarrow B)).$$

解答. (1)  $P \rightarrow (Q \rightarrow P)$  的真值表如下：

| P | Q | $P \rightarrow (Q \rightarrow P)$ |
|---|---|-----------------------------------|
| 0 | 0 | 1                                 |
| 0 | 1 | 1                                 |
| 1 | 0 | 1                                 |
| 1 | 1 | 1                                 |

从真值表可以看出  $P \rightarrow (Q \rightarrow P)$  是重言式。

(2) 在  $P \rightarrow (Q \rightarrow P)$  中，令：

- 将 P 替换为  $A \rightarrow B$ 。
- 将 Q 替换为  $(A \wedge D) \rightarrow (\neg B \vee C)$ 。

则：

$$P \rightarrow (Q \rightarrow P) \text{ 转换为 } (A \rightarrow B) \rightarrow (((A \wedge D) \rightarrow (\neg B \vee C)) \rightarrow (A \rightarrow B))$$

从而  $(A \rightarrow B) \rightarrow (((A \wedge D) \rightarrow (\neg B \vee C)) \rightarrow (A \rightarrow B))$  是重言式。

□

#### 注 0.4

如果直接用代入规则判断  $(A \rightarrow B) \rightarrow (((A \wedge D) \rightarrow (\neg B \vee C)) \rightarrow (A \rightarrow B))$ ，需要一个 16 行的表，而通过代入规则进行判断可以显著减少工作量。