离散数学 Week 10

第 10 次作业-solution

Lecturer: 杨启哲 Last modified: 2025 年 4 月 29 日

1. 给出自然数集 $\mathbb{N}$ 上的函数 f，使得:

(1) f 是单射但不是满射。

(2) f 是满射但不是单射。

解答.

(1) $f(x) = x + 1.$

(2) $f(x) = \lfloor \frac{x}{2} \rfloor.$

□

2. 令 A 是一个 $m \times n$ 的矩阵，定义函数 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$。

(1) 证明当 $n > m$ 时，f 不是单射。

(2) 证明当 $n < m$ 时，f 不是满射。

(3) 证明 f 是双射当且仅当 A 是可逆矩阵，此时 $m = n$。

解答.

(1) 只需证明 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 有非零解即可，这只需要注意到 A 的 n 个列向量线性相关 ($n > m$)，因此存在 $x_1, \ldots, x_n$ 满足:

$$A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}$$

(2) 反设存在一个满射，即对于 $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_m$，都存在 $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_m$ 使得:

$$A\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{e}_i$$

从而存在一个 $n \times m$ 的矩阵 $X = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 & \ldots & \boldsymbol{x}_m \end{bmatrix}$ 使得:

$$AX = E$$

但:

$$m = \text{rank}(E) = \text{rank}(AX) \leqslant \text{rank}(A) \leqslant n$$

与 $m > n$ 矛盾。

(3) 当 A 是可逆矩阵的时候，容易验证 f 是双射，下面证明另一个方向，由 $1,2$ 两问可知 $n=m$，并且由 f 是双射，从而 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 只有零解，否则若存在 $\boldsymbol{x}_0$ 满足 $A\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{0}$，则对任意 $\boldsymbol{x}\neq 0$ 有:

$$A\boldsymbol{x}=A(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}_0) \qquad \Longrightarrow \qquad f(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}_0)$$

这就说明 f 不是单射，矛盾。因此 A 是可逆的。

□

3. 给定函数 $f:A\to B$，$g:B\to C$，证明:

(1) 若 f 和 g 都是单射，则 $f\circ g$ 也是单射。

(2) 若 f 和 g 都是满射，则 $f\circ g$ 也是满射。

(3) 若 f 和 g 都是双射，则 $f\circ g$ 也是双射。

(4) $f=f\circ I_B=I_A\circ f$

(5) 若 f 是双射，则有 $f\circ f^{-1}=I_A$，$f^{-1}\circ f=I_B$.

解答.

(1) 假设存在 $x_1,x_2\in A$ s.t. $f\circ g(x_1)=f\circ g(x_2)$，则 $g(f(x_1))=g(f(x_2))$，由于 g 是单射，从而 $f(x_1)=f(x_2)$，由于 f 是单射，从而 $x_1=x_2$，即 $f\circ g$ 是单射。

(2) 对 $\forall x\in C$，存在 $y\in B$ s.t. $g(y)=x$，由于 f 是满射，从而存在 $z\in A$ s.t. $f(z)=y$，从而 $f\circ g(z)=x$，即 $f\circ g$ 是满射。

(3) 由上述性质立马可得。

(4) 只证 $f=f\circ I_B$.

$$(x,y)\in f\Leftrightarrow (x,y)\in f\wedge (y,y)\in I_B\Leftrightarrow (x,y)\in f\circ I_B$$

(5) 只证 $f\circ f^{-1}=I_A$.

$$(x,y)\in f\circ f^{-1}\Leftrightarrow \exists z(x,z)\in f\wedge (z,y)\in f^{-1}\Leftrightarrow (z,x),(z,y)\in f^{-1}\Leftrightarrow x=y\Leftrightarrow (x,y)\in I_A$$

□

4. 设集合 A,B,C,D 满足 $A\approx B, C\approx D$，证明: $A\times C\approx B\times D$.

解答. 由 $A\approx B$, 存在双射 $f:A\to B$, 由 $C\approx D$, 存在双射 $g:C\to D$, 定义映射 $h:A\times C\to B\times D$ 为:

$$h(x,y)=(f(x),g(y))$$

显然 h 是单射，因为 $(x_1,y_1)\neq(x_2,y_2)$ 时，$f(x_1)\neq f(x_2)$ 或 $g(y_1)\neq g(y_2)$; 同理可证满射，因此 h 是双射，从而 $A\times C\approx B\times D$. □

5. 令 A 是一个自然数的集合，对于任何一个自然数 x，我们定义 $n_A(x)$ 为集合 A 中把 x 拆分成两个不同元素之和的方案总数。例如，对于集合 $A = \{0,1,2,3,4\}$ 来说 $n_A(4) = 2$，$n_A(2) = 1$（因为 $4 = 1+3 = 0+4$，$2 = 0+2$）。

考虑如下的集合：对于任何一个自然数 $x \in \mathbb{N}$，记 $\mathrm{od}(x)$ 表示 x 的二进制表示中 1 的个数，定义：

- $A = \{x \in \mathbb{N} \mid \mathrm{od}(x) \equiv 0 \pmod 2\}$
- $B = \{x \in \mathbb{N} \mid \mathrm{od}(x) \equiv 1 \pmod 2\}$

请证明：

(1) 对于任何一个自然数 x，$n_A(x) = n_B(x)$.

(2) $\pi = \{A, B\}$ 是自然数集 $\mathbb{N}$ 的一个划分。

解答.

- 考虑任意 $x \in \mathbb{N}$，对任意 a_1，$a_2 \in A'$ 满足：

$$x = a_1 + a_2$$

  令 $a_1 = (i_1 i_2 \dots i_m)_2$，$a_2 = (j_1 j_2 \dots j_n)_2$ 为其二进制表示，并且令 l 是从左到右两个数第一个不一样的位置，则我们定义：

$$b_1 = (i_1 i_2 \dots i_{l-1} j_l i_{l+1} \dots i_m)_2,\ b_2' = (j_1 j_2 \dots j_{l-1} i_l j_{l+1} \dots j_n)_2$$

  即将该位置对换一下，显然 $b_1, b_2' \in B'$，并且有：

$$b_1 + b_2' = a_1 + a_2 = x$$

  注意到这个映射实际上是个双射，因此我们有 $n_A(x) = n_B(x)$。

- 只要注意到：
  - $A \cap B = \emptyset$.
  - $A \cup B = \mathbb{N}$.

  即可证明 $\pi = \{A, B\}$ 是 $\mathbb{N}$ 的一个划分。

$\square$