

第 10 次作业

Lecturer: 杨启哲

Last modified: 2025 年 4 月 22 日

截止日期 2025 年 4 月 28 日晚 24: 00

1. 给出自然数集 $\mathbb{N}$ 上的函数 f , 使得:

- (1) f 是单射但不是满射。
- (2) f 是满射但不是单射。

2. 令 A 是一个 $m \times n$ 的矩阵, 定义函数 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ 。

- (1) 证明当 $n > m$ 时, f 不是单射。
- (2) 证明当 $n < m$ 时, f 不是满射。
- (3) 证明 f 是双射当且仅当 A 是可逆矩阵, 此时 $m = n$ 。

3. 给定函数 $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$, 证明:

- (1) 若 f 和 g 都是单射, 则 $f \circ g$ 也是单射。
- (2) 若 f 和 g 都是满射, 则 $f \circ g$ 也是满射。
- (3) 若 f 和 g 都是双射, 则 $f \circ g$ 也是双射。
- (4) $f = f \circ I_B = I_A \circ f$
- (5) 若 f 是双射, 则有 $f \circ f^{-1} = I_A$, $f^{-1} \circ f = I_B$.

4. 设集合 A, B, C, D 满足 $A \approx B, C \approx D$, 证明: $A \times C \approx B \times D$.

5. 令 A 是一个自然数的集合, 对于任何一个自然数 x , 我们定义 $n_A(x)$ 为集合 A 中把 x 拆分成两个不同元素之和的方案总数。例如, 对于集合 $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ 来说 $n_A(4) = 2$, $n_A(2) = 1$ (因为 $4 = 1 + 3 = 0 + 4$, $2 = 0 + 2$)。

考虑如下的集合: 对于任何一个自然数 $x \in \mathbb{N}$, 记 $od(x)$ 表示 x 的二进制表示中 1 的个数, 定义:

- $A = \{x \in \mathbb{N} \mid od(x) \equiv 0 \pmod{2}\}$
- $B = \{x \in \mathbb{N} \mid od(x) \equiv 1 \pmod{2}\}$

请证明:

- (1) 对于任何一个自然数 x , $n_A(x) = n_B(x)$.
- (2) $\pi = \{A, B\}$ 是自然数集 $\mathbb{N}$ 的一个划分。