离散数学 Week 11

第 11 次作业-solution

Lecturer: 杨启哲 Last modified: 2025 年 5 月 6 日

1. 设 $f: A \to B, g: B \to C$，且 $f \circ g: A \to C$ 是双射。

   (1) 给出一个例子满足上述要求，并且 f, g 都不是双射。

   (2) 证明 f 是单射。

   (3) 证明 g 是满射。

   解答.

   (1) 令 $A = B = C = \mathbb{R}$，考察函数 $f(x) = e^x$ 和 $g(x) = \ln|x|$:

   - f 不是满射，因为不存在 x 满足；$f(x) = -1$。
   - g 不是单射，因为 $g(1) = g(-1)$。
   - $f \circ g(x) = g(f(x)) = \ln|e^x| = x$ 是双射。

   (2) 反设存在 $x_1 \neq x_2 \in A$ 使得 $f(x_1) = f(x_2)$，则有:

   $$g(f(x_1)) = g(f(x_2))$$

   与 $f \circ g$ 是双射矛盾。

   (3) 由于 $f \circ g$ 是双射，故对任意 $x \in C$，存在 $x_1 \in A$ 使得 $f \circ g(x_1) = x$，即:

   $$g(f(x_1)) = x$$

   注意到 $f(x_1) \in B$，故存在 $x_2 \in B$ 使得 $g(x_2) = x$，即 g 是满射。

   □

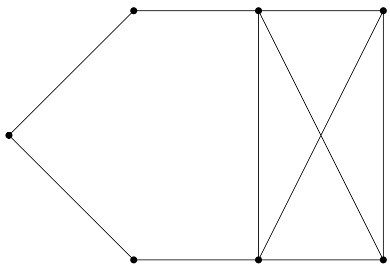
2. 令无向图 G 有 10 条边，3 度的顶点与 4 度的顶点各 2 个，其余顶点的度数均小于 3, 问 G 至少有多少个顶点？并在最小顶点的情况下画出 G 的示意图、度数列以及 $\Delta(G), \delta(G)$.

   解答. 设 G 有 x 个顶点，则有握手定理有:

   $$20 = 2|E| = \sum_{v \in V} d(v) \leqslant 3 \times 2 + 4 \times 2 + 2 \times (x - 4) = 2x + 6$$

   得出 $x \geqslant 7$, 从而 G 至少有 7 个顶点。当 $x = 7$ 时，G 的示意图如下:

   - 度数列：$(4, 4, 3, 3, 2, 2, 2)$
   - $\Delta(G) = 4, \delta(G) = 2$



$\square$

3. 下列各数列中哪些是可图化的？可简单图化的？对于可简单图化的数列给出一个对应的简单图：

(1) $(2, 2, 3, 5, 5, 6, 6)$

(2) $(1, 1, 2, 2, 3, 3, 5, 5)$

(3) $(2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3)$

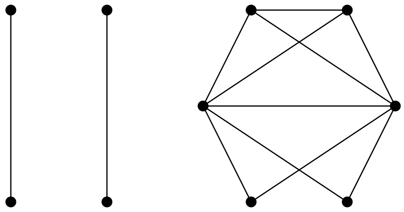
解答.

(1) 该度数列不可被简单图化，反设其存在一个简单图，注意到一共有 7 个顶点，因此两个度数为 6 的点一定与其余每个点都有边。删去这两个点后，图的度数列为：

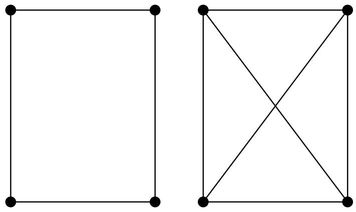
$$(0, 1, 1, 3, 3)$$

这说明 $(1, 1, 3, 3)$ 一定是某个简单图的度数列，但是这个度数列不可被简单图化（每个点都至少有 2 的度数），因此矛盾。

(2) (2) 和 (3) 皆可以被图化，如下图所示：



(2)



(3)

$\square$

4. 设 G 是 n 阶 $n+1$ 条边的无向图，证明：G 中存在顶点 v 使得 $d(v) \geqslant 3$.

解答. 反设 G 的任何一个顶点度数均 $\leqslant 2$，则由握手定理：

$$2(n+1) = 2|E| = \sum_{v \in V} d(v) \leqslant 2 \times n$$

矛盾。 $\square$

5. 证明 3 维空间中不存在奇数个面且每个面都有奇数条棱的多面体。

解答. 对三维空间中的任何一个多面体，我们构建如下的无向图 $G = (V, E)$:

(1) 将每个面视为一个顶点，即 $v_1, \dots, v_n$ 各表示多面体的一个面。
(2) 对于任一条棱，假设其与 v_i, v_j 对应的面相连，则添加边 (v_i, v_j)。

现在假设存在一个多面体 G，其有奇数个面且每个面都有奇数条棱，则:

(1) $|V|$ 是奇数。
(2) 对于每个顶点 $v \in V$，$d(v)$ 是奇数。

从而其度数和为:

$$\sum_{v \in V} d(v)\text{是奇数}$$

但根据握手定理:

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|\text{是偶数}$$

矛盾，从而不存在这样的多面体。 □