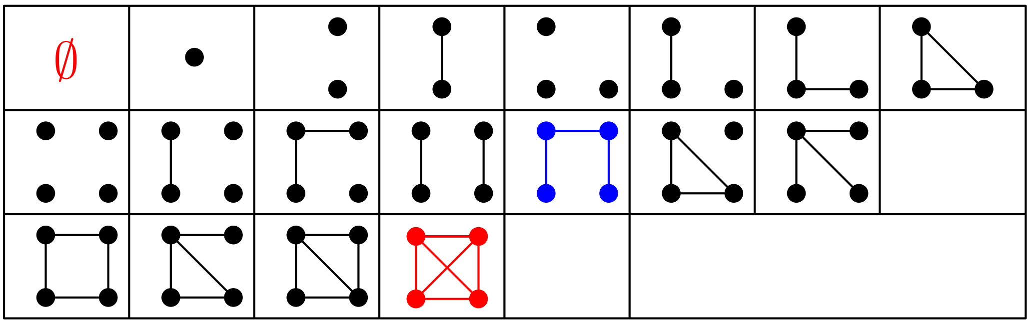
离散数学 Week 12

第 12 次作业-solution

Lecturer: 杨启哲 Last modified: 2025 年 5 月 20 日

1. 画出完全图 K_4 的所有非同构的子图，并且指出哪些图是生成子图。

解答. K_4 的所有非同构子图如下:



其中一共 19 个非同构的子图，其中第二和第三行是生成子图，共 11 个。特别的，标蓝的是自补图，标红的是平凡子图。

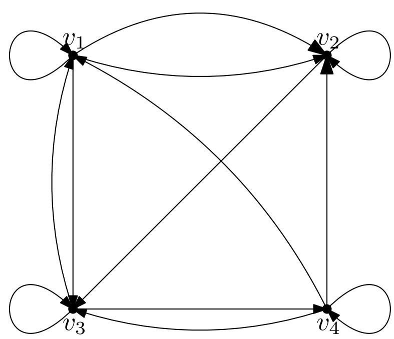
□

2. 设有向图 D 的顶点集为 $V = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$，其邻接矩阵 A 为:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

画出 D 的示意图，并求出 D 各个顶点的出度与入度。

解答. D 的示意图如下：其中:



- v_1 的出度为 4，入度为 3.
- v_2 的出度为 2，入度为 4.
- v_3 的出度为 3，入度为 4.
- v_4 的出度为 4，入度为 2.

□

3. 设 G 是 n 阶无向图，若其补图 $\bar{G}$ 与 G 同构，则称 G 为自补图。证明若 G 是自补图，则有 $n \equiv 1 \pmod 4$ 或 $n \equiv 0 \pmod 4$.

解答. 不妨令 G 有 k 条边，则 $\bar{G}$ 有 $\frac{n(n-1)}{2} - k$ 条边。由 $\bar{G}$ 与 G 同构，我们有:

$$k = \frac{n(n-1)}{2} - k \Longrightarrow 4k = n(n-1)$$

注意到 $(n, n-1) = 1$，从而 $n \equiv 1 \pmod 4$ 或 $n \equiv 0 \pmod 4$。 □

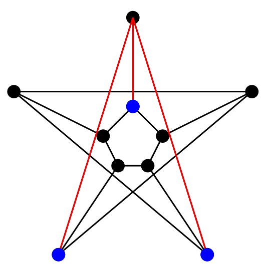
4. 设 G 是 6 阶简单无向图，证明：G 或其补图 $\overline{G}$ 中存在 3 个点彼此相邻。

解答. G 种任取一点 v，则由抽屉原理在 G 或其补图 $\overline{G}$ 一定存在一张图使得有 3 个点与其相邻，不妨设为 G。令与其相邻的点为 v_1, v_2, v_3。则我们有:

- 若 v_1, v_2, v_3 在 G 中不存在边，则 v_1, v_2, v_3 在 $\overline{G}$ 中彼此相邻。
- 若 v_1, v_2, v_3 在 G 中至少存在一条边，不妨记为 (v_1, v_2)，则 v, v_1, v_2 在 G 中彼此相邻。

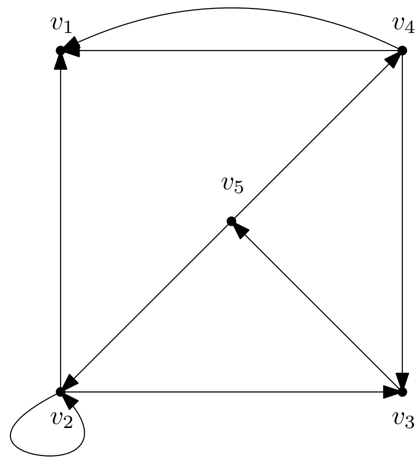
□

5. 求 Peterson 图 G 的点连通度 $\kappa(G)$ 和边连通度 $\lambda(G)$.



解答. Peterson 图 G 的点连通度 $\kappa(G) = 3$，边连通度 $\lambda(G) = 3$(删去图中蓝色顶点或者红色边会使其有两个连通分支，另一方面可以验证任删两条边或者两个顶点图还是连通的，这是因为删去任何一个点图都是哈密顿图。). □

6. 有向图 G 如下图所示，求:



(1) v_2 到 v_5 一共有多少条长度最多为 3 的通路?

(2) v_2 一共有多少条长度恰为 $1,2,3,4$ 的回路?

(3) 图中长度小于等于 4 的通路数和回路数。

(4) 写出 G 的可达矩阵。

解答. G 的邻接矩阵为:

$$A=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\1&1&1&0&0\\0&0&0&0&1\\2&0&1&0&0\\0&1&0&1&0\end{bmatrix}$$

计算可得:

$$A^2=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\1&1&1&0&1\\0&1&0&1&0\\0&0&0&0&1\\3&1&2&0&0\end{bmatrix},\ A^3=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\1&2&1&1&1\\3&1&2&0&0\\0&1&0&1&0\\1&1&1&0&2\end{bmatrix},\ A^4=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\4&3&3&1&1\\1&1&1&0&2\\3&1&2&0&0\\1&3&1&2&1\end{bmatrix}$$

因此我们有:

(1) v_2 到 v_5 长度最多为 3 的通路数 $=A[2][5]+A^2[2][5]+A^3[2][5]=2$

(2) v_2 长度恰为 $1,2,3,4$ 的回路恰好为 $A[2][2],A^2[2][2],A^3[2][2],A^4[2][2]$，即 $1,1,2,3$

(3) $\leqslant 4$ 的通路数 $=\sum_{k=1}^{4}\sum_{i,j\leqslant 5}(A^k[i][j])=72.$

$\leqslant 4$ 的回路数 $=\sum_{k=1}^{4}\sum_{i\leqslant 5}(A^k[i][i])=14.$

(4) G 的可达矩阵如下:

$$P=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\end{bmatrix}$$

$\square$

7. 设 $G=(V_1,V_2,E)$ 是 k-正则二分图，$k\geqslant 1$，证明：G 中存在完美匹配。

解答. 先证 $|V_1|=|V_2|$。注意到 G 是 k-正则二分图，故有：

$$k|V_1|=|E|=\sum_{v\in V_1} d(v)=k|V_2| \quad \Rightarrow \quad |V_1|=|V_2|$$

下考虑任意的 $S\subseteq |V_1|$，反设存在 S，使得 $|N(S)|<|S|$，则有：

$$\sum_{v\in N(S)} d(v)\geqslant \sum_{v\in S} d(v)=k|S|$$

注意到 $|N(S)|<k$，从而由抽屉原理，存在 $v\in N(S)$，使得 $d(v)>k$，这与 G 是 k-正则二分图矛盾，故对任意的 $S\subseteq |V_1|$，有 $|N(S)|\geqslant |S|$，从而由 Hall 定理，G 存在完备匹配，由于 $|V_1|=|V_2|$，故 G 存在完美匹配。 $\square$

注 0.1

这里，完美匹配其实就是完备匹配，只是是在 $|V_1|=|V_2|$ 的条件的二分图的完备匹配。

8. n 位老师教 n 门课，已知每位教师至少能教两门课程，而每门课程至多有两位老师能教，问：能否每位教师正好教一门课？

解答. 我们将其建模成一张二分图，构造图 $G=(V_1,V_2,E)$，其中：

- V_1 有 n 个顶点，每个顶点 u_1 代表一位老师。
- V_2 有 n 个顶点，每个顶点 v_1 代表一门课程。
- E 中的边 (u_1,v_1) 代表老师 u_1 能教课程 v_1。

由题意，G 满足：

(1) 对任意的 $u\in V_1$, $d(u)\geqslant 2$.

(2) 对任意的 $v\in V_2$, $d(v)\leqslant 2$.

问题转化为：G 中是否存在完备匹配 (完美匹配)?

事实上，注意到：

$$\sum_{u\in V_1} d(u)\geqslant 2n=2|V_1|=2|V_2|=\sum_{v\in V_2} d(v)$$

从而：对任意的 $u\in V_1\cup V_2$，我们有：$d(u)=2$。从而该图是一个 2-正则二分图，由上一题的结论，该图存在完美匹配，即每位老师正好教一门课。 $\square$

9. 证明，如果一个 n 阶无向图至少有 n 条边，则一定存在一个圈。

解答. 我们对 n 进行归纳,$n=1$ 时由于只有自环，命题成立。

假设命题对 $\leqslant n-1$ 个点的图 G 均成立，考察 $|V|=n$ 的情况。我们可以不妨假设 G 是连通的，否则存在一个连通分支 (V', E') 满足 $|V'|<n, |E'|>|V'|$，从而由归纳假设其存在一个圈。现在考虑 G 中的一条边 (u, v):

- (u, v) 不是割边，即去除 (u, v) 后还存在一条 u 到 v 的路径 π，则 $(u, v)\pi$ 是一个圈。
- (u, v) 是割边，则删去 (u, v) 后图 G 被分解成两个连通分支，注意到其一定存在一个连通分支 (V', E') 满足 $|V'|<n, |E'|>|V'|$，从而由归纳假设其存在一个圈。

从而命题对 n 也成立。 $\square$