

第 12 次作业

Lecturer: 杨启哲

Last modified: 2025 年 5 月 13 日

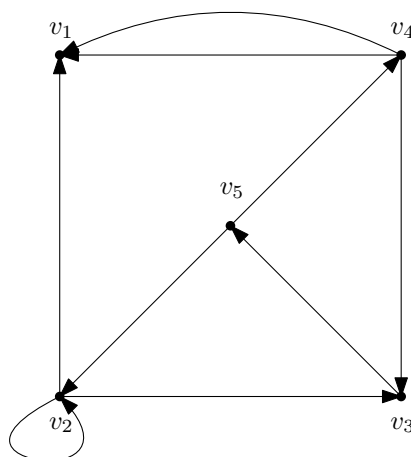
截止日期 2025 年 5 月 19 日晚 24: 00

1. 画出完全图 K_4 的所有非同构的子图，并且指出哪些图是生成子图。
2. 设有向图 D 的顶点集为 $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ，其邻接矩阵 A 为：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

画出 D 的示意图，并求出 D 各个顶点的出度与入度。

3. 设 G 是 n 阶无向图，若其补图 $\bar{G}$ 与 G 同构，则称 G 为自补图。证明若 G 是自补图，则有 $n \equiv 1(\text{mod } 4)$ 或 $n \equiv 0(\text{mod } 4)$ 。
4. 设 G 是 6 阶简单无向图，证明： G 或其补图 $\bar{G}$ 中存在 3 个点彼此相邻。
5. 求 Peterson 图 G 的点连通度 $\kappa(G)$ 和边连通度 $\lambda(G)$ 。
6. 有向图 G 如下图所示，求：



- (1) v_2 到 v_5 一共有多少条长度最多为 3 的通路？
 - (2) v_2 一共有多少条长度恰为 1, 2, 3, 4 的回路？
 - (3) 图中长度小于等于 4 的通路数和回路数。
 - (4) 写出 G 的可达矩阵。
7. 设 $G = (V_1, V_2, E)$ 是 k -正则二分图， $k \geq 1$ ，证明： G 中存在完美匹配。

8. n 位老师教 n 门课，已知每位教师至少能教两门课程，而每门课程至多有两位老师能教，问：能否每位教师正好教一门课？
9. 证明，如果一个 n 阶无向图至少有 n 条边，则一定存在一个圈。