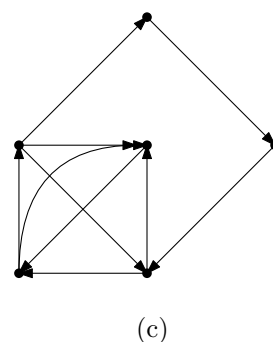
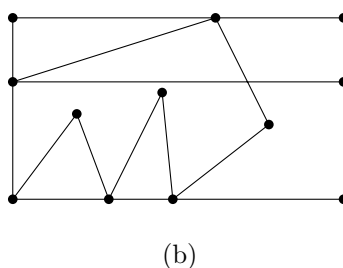
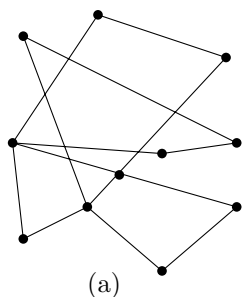


第 13 次作业-solution

Lecturer: 杨启哲

Last modified: 2025 年 5 月 26 日

1. 判断下列图中, 哪些是欧拉图?



解答. (1) 图 (a) 中的所有节点度数都是偶数, 因此是欧拉图。

(2) 图 (b) 中有两个节点的度数为奇数, 因此不是欧拉图 (只是半欧拉图)。

(3) 图 (c) 中存在一个节点的入度 $>$ 出度, 因此不是欧拉图 (并且由于差 > 1 , 都不是半欧拉图)。

□

2. 证明, 若 n 个点的无向图 G 满足: 对任意的两个不同的顶点 u 和 v , $d(u) + d(v) \geq n$, 则 G 中一定存在哈密顿回路。

解答. 注意到, 对于任意的 u, v 都有:

$$d(u) + d(v) \geq n > n - 1$$

从而 G 中存在一条哈密顿通路, 记为 $\Gamma = v_1, \dots, v_n$ 。下面有两种情况:

- $(v_1, v_n) \in E$, 则 $\Gamma \cup \{(v_1, v_n)\}$ 也是一条回路。
- $(v_1, v_n) \notin E$, 若存在 $i \in \{3, \dots, n-1\}$, 使得 $(v_1, v_i), (v_{i-1}, v_n) \in E$, 则:

$$v_{i-1}, v_n, v_{n-1}, \dots, v_i, v_1, \dots, v_{i-2}, v_{i-1}$$

是一个哈密顿回路。否则, 我们有:

$$d(v_1) + d(v_n) \leq d(v_1) + (n - 1 - d(v_1)) = n - 1$$

与条件矛盾, 因此这样的 i 一定存在。

□

3. 证明，任何无向树都是二分图。

解答. 只需要注意到无向树中没有环，自然没有奇圈，从而无向树是二分图。

□

4. 设 G 是无向连通图，证明若 G 中有割点或者桥，则 G 不是哈密顿图。

解答. 设 G 中存在割点 v ，则删去 v 后图 $G - v$ 会变成两个连通分支，即： $p(G - v) > 1$ ，从而 G 不是哈密顿图。

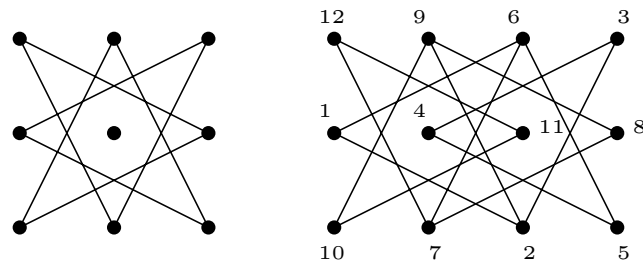
另一方面，若 G 存在桥 e ，则删去 e 上任何一个端点后图都不连通，从而由上可知 G 不是哈密顿图。

□

5. 国际象棋中的马走日字，即在 (x, y) 位置的马可以走到 $(x \pm 1, y \pm 2)$ 或 $(x \pm 2, y \pm 1)$ 位置（如果这个位置是棋盘上的位置）。马的一个周游指的是可以从棋盘上某个格子开始，走遍所有的格子并且每个格子只走一次：

- 证明： 3×4 的棋盘上存在一个马的周游。
- 证明： 3×3 的棋盘上不存在马的周游。

解答. 将棋盘转换为图可得：



- 3×4 的棋盘上存在一个马的周游，顺序如右图所示。
- 3×3 的棋盘上不存在马的周游，因为存在一个孤立点。

□