离散数学 Week 2

第 2 次作业-solution

Lecturer: 杨启哲 Last modified: 2025 年 3 月 9 日

1. 用等值演算法证明下列等值式。

   (1) $p \to (q \to r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \to r$.

   (2) $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow ((p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p)) \Leftrightarrow p \wedge \neg p$.

解答.

(1)

$$\begin{aligned} p \to (q \to r) \Leftrightarrow\ & \neg p \vee (q \to r) \\ \Leftrightarrow\ & \neg p \vee (\neg q \vee r) \\ \Leftrightarrow\ & \neg(p \wedge q) \vee r \\ \Leftrightarrow\ & (p \wedge q) \to r \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} (p \leftrightarrow q) \leftrightarrow ((p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p)) \Leftrightarrow\ & (p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (p \leftrightarrow \neg q) \\ \Leftrightarrow\ & (p \leftrightarrow q \wedge \neg q) \\ \Leftrightarrow\ & \mathbf{0} \\ \Leftrightarrow\ & p \wedge \neg p \end{aligned}$$

□

注 0.1

我们也可以按化成 $\neg, \wedge, \vee$ 的方式来证明第 2 问:

$$\begin{aligned} (p \leftrightarrow q) \leftrightarrow ((p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p)) \Leftrightarrow\ & ((p \wedge q) \vee (\neg q \wedge \neg p)) \leftrightarrow ((p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p)) \\ \Leftrightarrow\ & ((p \wedge q) \vee (\neg q \wedge \neg p)) \to ((p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p)) \\ & \wedge ((p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p)) \to ((p \wedge q) \vee (\neg q \wedge \neg p)) \end{aligned}$$

注意到:

$$
\begin{aligned}
&((p\wedge q)\vee(\neg q\wedge\neg p))\to((p\wedge\neg q)\vee(q\wedge\neg p))\\
&\Leftrightarrow ((p\vee\neg q)\wedge(\neg p\vee q))\to((p\wedge\neg q)\vee(q\wedge\neg p))\\
&\Leftrightarrow (\neg((p\vee\neg q)\wedge(\neg p\vee q)))\vee((p\wedge\neg q)\vee(q\wedge\neg p))\\
&\Leftrightarrow ((\neg p\wedge q)\vee(p\wedge\neg q))\vee((p\wedge\neg q)\vee(q\wedge\neg p))\\
&\Leftrightarrow ((\neg p\wedge q)\vee(p\wedge\neg q))\\
&((p\wedge\neg q)\vee(q\wedge\neg p))\to((p\wedge q)\vee(\neg q\wedge\neg p))\\
&\Leftrightarrow ((p\vee q)\wedge(\neg p\vee\neg q))\to((p\wedge q)\vee(\neg q\wedge\neg p))\\
&\Leftrightarrow (\neg((p\vee q)\wedge(\neg p\vee\neg q)))\vee((p\wedge q)\vee(\neg q\wedge\neg p))\\
&\Leftrightarrow ((\neg p\wedge\neg q)\vee(p\wedge q))\vee((p\wedge q)\vee(\neg q\wedge\neg p))\\
&\Leftrightarrow (p\wedge q)\vee(\neg q\wedge\neg p)
\end{aligned}
$$

从而:

$$
\begin{aligned}
(p\leftrightarrow q)\leftrightarrow((p\wedge\neg q)\vee(q\wedge\neg p)) &\Leftrightarrow ((p\wedge q)\vee(\neg q\wedge\neg p))\wedge((p\wedge\neg q)\vee(q\wedge\neg p))\\
&\Leftrightarrow \mathbf{0}\Leftrightarrow p\wedge\neg p
\end{aligned}
$$

当然略显麻烦一些。

2. 由下列真值表，分别写从成真赋值和成假赋值的角度写出以 p,q,r 为命题变元的命题公式 A,B 的两个表达式:

p	q	r	A	B
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	0

表 1: 命题公式 A,B 的真值表

解答. 对于 A 来说:

- 从成假赋值来写: $A=(p\vee q\vee\neg r)\wedge(p\vee\neg q\vee\neg r)\wedge(\neg p\vee q\vee\neg r)\wedge(\neg p\vee\neg q\vee r)$.
- 从成真赋值来写: $A=(\neg p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge q\wedge\neg r)\vee(p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(p\wedge q\wedge r)$.

对于 B 来说:

- 从成假赋值来写： $B = (p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r)$.
- 从成真赋值来写：$B = (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r)$.

$\square$

3. 将下列公式化成与之等值的仅含 $\{\neg, \wedge\}$ 中联结词的命题公式：

(1) $(p \leftrightarrow r) \wedge q$.

(2) $(p \to (q \wedge \neg p)) \wedge q \wedge r$.

解答. (1) 由等值演算，我们有：

$$\begin{aligned}(p \leftrightarrow r) \wedge q &\Leftrightarrow ((p \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg r)) \wedge q \\ &\Leftrightarrow \neg(\neg(p \wedge r) \wedge \neg(\neg p \wedge \neg r)) \wedge q\end{aligned}$$

(2) 由等值演算，我们有：

$$\begin{aligned}(p \to (q \wedge \neg p)) \wedge q \wedge r &\Leftrightarrow (\neg p \vee (q \wedge \neg p)) \wedge q \wedge r \\ &\Leftrightarrow \neg(p \wedge \neg(q \wedge \neg p)) \wedge q \wedge r\end{aligned}$$

$\square$

注 0.2

答案并不唯一，保持等值即可。如若在第二问中注意到：

$$p \to (q \wedge \neg p) \Leftrightarrow \neg p \vee (q \wedge \neg p) \Leftrightarrow \neg p$$

则可以直接简化为： $\neg p \wedge q \wedge r$.

4. 课件上讲到，与非联结词 $\uparrow$ 可以表示其他的联结词，如：

$$\begin{aligned}\neg p &\Leftrightarrow p \uparrow p, \\ p \wedge q &\Leftrightarrow (p \uparrow q) \uparrow (p \uparrow q), \\ p \vee q &\Leftrightarrow (p \uparrow p) \uparrow (q \uparrow q), \\ p \to q &\Leftrightarrow p \uparrow (q \uparrow q), \\ p \leftrightarrow q &\Leftrightarrow (p \uparrow q) \uparrow (q \uparrow p).\end{aligned}$$

请用或非 $\downarrow$ ($p \downarrow q \Leftrightarrow \neg(p \vee q)$) 表示出联结词 $\neg, \wedge, \vee, \to, \leftrightarrow$。

解答. 只需写出 $\neg$ 即可，注意到：

$$\neg p \Leftrightarrow p \downarrow p$$

从而：

(1) $\neg p \Leftrightarrow p \downarrow p$.

(2) $p \vee q \Leftrightarrow \neg(p \downarrow q) \Leftrightarrow (p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q)$.

(3) $p \wedge q \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q) \Leftrightarrow (p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)$.

(4) $p \to q \Leftrightarrow \neg p \vee q \Leftrightarrow ((p \downarrow p) \downarrow q) \downarrow ((p \downarrow p) \downarrow q)$

(5) $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow \neg(\neg(p \vee \neg q) \vee (\neg(\neg p \vee q))) \Leftrightarrow (p \downarrow (q \downarrow q)) \downarrow ((p \downarrow p) \downarrow q)$

□

5. 证明关于对偶式和内否式的两个性质:

(1) $(\neg A)^* \Leftrightarrow \neg(A^*)$.

(2) $(\neg A)^- \Leftrightarrow \neg(A^-)$.

解答.

(1) 对 A 的联结词进行归纳:

BASE : $A = p$，则有 $(\neg A)^* = \neg p = \neg(A^*)$，即 $(\neg A)^* \Leftrightarrow \neg(A^*)$。

IH : 假设对于 A 的联结词数小于 n 时成立。则当 n 时，A 一定如下三种情况:

(i) $A = \neg A_1$，则由归纳假设有 $(\neg A_1)^* \Leftrightarrow \neg(A_1^*)$，从而:

$$(\neg A)^* \Leftrightarrow (\neg\neg A_1)^* \Leftrightarrow (A_1)^* \Leftrightarrow \neg\neg(A_1^*) \Leftrightarrow \neg((\neg A_1)^*) \Leftrightarrow \neg(A^*)$$

(ii) $A = A_1 \vee A_2$, 则由归纳假设有 $(\neg A_1)^* \Leftrightarrow \neg(A_1^*)$，$(\neg A_2)^* \Leftrightarrow \neg(A_2^*)$，从而:

$$\begin{aligned}(\neg A)^* &\Leftrightarrow (\neg(A_1 \vee A_2))^* \Leftrightarrow (\neg A_1 \wedge \neg A_2)^* \\ &\Leftrightarrow (\neg A_1)^* \vee (\neg A_2)^* \Leftrightarrow \neg(A_1^*) \vee \neg(A_2^*) \Leftrightarrow \neg(A_1^* \wedge A_2^*) \Leftrightarrow \neg(A^*)\end{aligned}$$

(iii) $A = A_1 \wedge A_2$, 则由归纳假设有 $(\neg A_1)^* \Leftrightarrow \neg(A_1^*)$，$(\neg A_2)^* \Leftrightarrow \neg(A_2^*)$，从而:

$$\begin{aligned}(\neg A)^* &\Leftrightarrow (\neg(A_1 \wedge A_2))^* \Leftrightarrow (\neg A_1 \vee \neg A_2)^* \\ &\Leftrightarrow (\neg A_1)^* \wedge (\neg A_2)^* \Leftrightarrow \neg(A_1^*) \wedge \neg(A_2^*) \Leftrightarrow \neg(A_1^* \vee A_2^*) \Leftrightarrow \neg(A^*)\end{aligned}$$

(2) 对 A 的联结词进行归纳:

BASE : $A = p$，则有 $(\neg A)^- = p \Leftrightarrow \neg\neg p = \neg(A^-)$，即 $(\neg A)^- \Leftrightarrow \neg(A^-)$。

IH : 假设对于 A 的联结词数小于 n 时成立。则当 n 时，A 一定如下三种情况:

(i) $A = \neg A_1$，则由归纳假设有 $(\neg A_1)^- \Leftrightarrow \neg(A_1^-)$，从而:

$$(\neg A)^- \Leftrightarrow (\neg\neg A_1)^- \Leftrightarrow (A_1)^- \Leftrightarrow \neg\neg(A_1^-) \Leftrightarrow \neg((\neg A_1)^-) \Leftrightarrow \neg(A^-)$$

(ii) $A = A_1 \vee A_2$, 则由归纳假设有 $(\neg A_1)^- \Leftrightarrow \neg(A_1^-)$，$(\neg A_2)^- \Leftrightarrow \neg(A_2^-)$，从而:

$$\begin{aligned}(\neg A)^- &\Leftrightarrow (\neg(A_1 \vee A_2))^- \Leftrightarrow (\neg A_1 \wedge \neg A_2)^- \\ &\Leftrightarrow (\neg A_1)^- \wedge (\neg A_2)^- \Leftrightarrow \neg(A_1^-) \wedge \neg(A_2^-) \Leftrightarrow \neg(A_1^- \vee A_2^-) \Leftrightarrow \neg(A^-)\end{aligned}$$

(iii) $A=A_1\wedge A_2$, 则由归纳假设有 $(\neg A_1)^-\Leftrightarrow\neg(A_1^-)$，$(\neg A_2)^-\Leftrightarrow\neg(A_2^-)$，从而:

$$\begin{aligned}(\neg A)^- &\Leftrightarrow (\neg(A_1\wedge A_2))^-\Leftrightarrow(\neg A_1\vee\neg A_2)^-\\ &\Leftrightarrow(\neg A_1)^-\vee(\neg A_2)^-\Leftrightarrow\neg(A_1^-)\vee\neg(A_2^-)\Leftrightarrow\neg(A_1^-\wedge A_2^-)\Leftrightarrow\neg(A^-)\end{aligned}$$

□

注 0.3

我将两个完整的结构归纳法的证明都写了出来，方便大家理解，可以看到总体是很像的，但在运算推导的过程中需要仔细区分。