

第 3 次作业-solution

Lecturer: 杨启哲

Last modified: 2025 年 3 月 16 日

1. 求出下列命题公式的主合取范式和主析取范式。

(1) $(p \wedge q) \vee r$.

(2) $(p \vee (q \wedge r)) \rightarrow (p \vee q \vee r)$.

解答.

(1) 计算可得:

- 其主合取范式可为: $(p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee r)$
($M_0 \wedge M_2 \wedge M_4$).
- 其主析取范式可为: $(\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge r)$
($m_1 \vee m_3 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7$)

(2) 利用等值演算计算可得:

- 其主合取范式为 1。
- 其主析取范式为 $m_0 \vee m_1 \vee m_2 \vee m_3 \vee m_4 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7$.

□

2. 用消解法判断下列公式是否是可满足的:

(1) $(\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee r) \wedge (\neg r \vee p) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r)$.

(2) $(p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee r)$

注 0.1

如果能找到一个成真赋值使得公式成立, 则公式是可满足的。但这道题希望大家只用消解法来判断, 看一下如果一个公式是可满足的, 消解法最终会如何停止。(即不会产生新的公式)

解答.

- $(\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee r) \wedge (\neg r \vee p) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r)$ 是可满足的:
 - $\neg p \vee q, \neg q \vee r$ 消解出 $\neg p \vee r$.
 - $\neg q \vee r, \neg r \vee p$ 消解出 $\neg q \vee p$.
 - $\neg r \vee p, \neg p \vee q$ 消解出 $\neg r \vee q$.
 - $\neg r \vee q, \neg q \vee r$ 消解出 $r \vee \neg r = 1$ (这不是停止!)

- $\neg p \vee \neg q \vee \neg r, \neg p \vee q$ 消解出 $\neg p \vee \neg r$.
- $\neg p \vee \neg q \vee \neg r, \neg q \vee r$ 消解出 $\neg p \vee \neg q$.
- $\neg p \vee \neg q \vee \neg r, \neg r \vee p$ 消解出 $\neg q \vee \neg r$.
- $\neg p \vee \neg q, \neg p \vee q$ 消解出 $\neg p$.
- $\neg p \vee \neg r, \neg r \vee p$ 消解出 $\neg r$.
- $\neg q \vee \neg r, \neg q \vee r$ 消解出 $\neg q$.

最终不能产生新的简单析取式，从而该公式是可满足的。

- $(p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee r)$ 也是可满足的：

- $p \vee q, p \vee \neg q$ 消解成 p 。
- $p \vee q, \neg p \vee r$ 消解成 $q \vee r$ 。
- $p \vee \neg q, \neg p \vee r$ 消解成 $\neg q \vee r$ 。
- $q \vee r, \neg q \vee r$ 消解成 r 。
- $q \vee r, p \vee \neg q$ 消解成 $r \vee p$ 。

最终不能产生新的简单析取式，从而该公式是可满足的。

□

3. 令 S 是一个合取范式， l 是一个出现在 S 中的文字，并且满足 l^c 不出现在 S 中。 l^c 的定义为：

$$l^c = \begin{cases} p, & \text{如果 } l = \neg p \\ \neg p, & \text{如果 } l = p \end{cases}$$

将所有含有 l 的简单析取式去掉后得到的合取范式记为 S_l 。证明 S 与 S_l 是同可满足的。

解答. 令 S 中出现的变元为 $p_1, \dots, p_n, l$ ：

- 假设 S 是可满足的，则存在一个赋值 $\mathcal{A} : \{p_1, \dots, p_n, l\} \rightarrow \{0, 1\}$ 使得 S 为真。构造赋值 $\mathcal{A}' : \{p_1, \dots, p_n\} \rightarrow \{0, 1\}$ 满足 $\mathcal{A}'(p_i) = \mathcal{A}(p_i)$ ，则由 S_l 的定义， S_l 在赋值 $\mathcal{A}'$ 下也为真，即 S_l 是可满足的。
- 假设 S_l 是可满足的，则存在一个赋值 $\mathcal{A} : \{p_1, \dots, p_n\} \rightarrow \{0, 1\}$ 使得 S_l 为真。令 l_k 为 l 成真的赋值，则构造赋值 $\mathcal{A}' : \{p_1, \dots, p_n, l\} \rightarrow \{0, 1\}$ 满足：

$$\mathcal{A}'(p) = \begin{cases} \mathcal{A}(p) & \text{if } p = p_i \\ l_k & \text{if } p = l \end{cases}$$

容易验证 S 在此赋值下为真，从而 S 是可满足的。

□

4. 在自然推理系统 P 中构造下面推理的证明：

$$(1) \{p \rightarrow q, \neg(q \wedge r), r\} \vdash \neg p$$

(2) $\{\neg p \vee r, \neg q \vee s, p \wedge q\} \vdash t \rightarrow (r \wedge s)$

解答.

• 证明过程如下:

- | | |
|--------------------------|-----------|
| (1) $\neg(q \wedge r)$ | 前提 |
| (2) $\neg q \vee \neg r$ | 置换 |
| (3) r | 前提 |
| (4) $\neg q$ | 2,3 析取三段论 |
| (5) $p \rightarrow q$ | 前提 |
| (6) $\neg p$ | 拒取 |

• 我们证明 $\{\neg p \vee r, \neg q \vee s, p \wedge q, t\} \vdash (r \wedge s)$ 。证明过程如下:

- | | |
|---------------------|-----------|
| (1) $p \wedge q$ | 前提 |
| (2) p | 1, 化简 |
| (3) $\neg p \vee r$ | 前提 |
| (4) r | 2,3 析取三段论 |
| (5) q | 1, 化简 |
| (6) $\neg q \vee s$ | 前提 |
| (7) s | 5,6 析取三段论 |
| (8) $r \wedge s$ | 4,7 合取引入 |

□

注 0.2

这里把利用的推理规则写出来是方便同学们理解，实际并不需要一定全部写明。

5. 我们考虑一个特殊的前提:

$$A = \{p \wedge q, p \wedge \neg q, \neg p \wedge q, \neg p \wedge \neg q\}$$

(1) 在自然推理系统 P 中构造下面推理的证明: $A \vdash 0$.

(2) 由第一问说明，对于任意结论 C， $A \vdash C$ ，即可以基于该前提构造任意结论的证明。

注 0.3

这一问是想大家意识到，证明其实跟真值（语义）无关，它只是语法上的推导。当然无论是我们现在学的命题逻辑和后面的一阶逻辑，其语法和语义都是可以满足可靠和完备的，所以很多时候可以混着理解。

解答. • 证明过程如下:

- | | |
|------------------|-------|
| (1) $p \wedge q$ | 前提 |
| (2) q | 1, 化简 |

(3) $p \wedge \neg q$	前提
(4) $\neg q$	3, 化简
(5) $q \wedge \neg q$	2,4 合取引入
(6) 0	5 置换规则

- 只需注意到 $0 \rightarrow C$ 是永真式即可，从而对于任意结论 C ，可以构造证明如下：

(1) $p \wedge q$	前提
(2) q	1, 化简
(3) $p \wedge \neg q$	前提
(4) $\neg q$	3, 化简
(5) $q \wedge \neg q$	2,4 合取引入
(6) 0	5 置换规则
(7) $\neg q \vee q$	4, 析取引入
(8) 1	7, 置换规则
(9) $1 \vee C$	8, 析取引入
(10) $0 \rightarrow C$	9, 置换规则
(11) C	6.10, 假言推理

□