离散数学　　Week 4

第 4 次作业-solution

Lecturer: 杨启哲　　Last modified: 2025 年 3 月 17 日

1. 用自然推理系统 P 构造下面推理的证明：

   如果今天是星期六，我们就要到颐和园或圆明园去玩。如果颐和园游人太多，我们就不去颐和园玩。今天是星期六，颐和园游人太多，所以我们去圆明园玩。

   解答. 令 p：今天是星期六，q：我们去颐和园玩，r：我们去圆明园玩，s：颐和园游人太多，则上述推理形式化为：

   $$\{p \to (q \vee r),\ s \to \neg q, p, s\} \vdash r$$

   (1) p　　前提引入
   (2) $p \to (q \vee r)$　　前提引入
   (3) $q \vee r$　　1,2 分离
   (4) s　　前提引入
   (5) $s \to \neg q$　　前提引入
   (6) $\neg q$　　4,5 分离
   (7) r　　3,6 析取三段论

   □

2. 分别利用反证法和不利用反证法证明下列推理：

   $$\{p \to \neg q, \neg r \vee q, r \wedge \neg s\} \vdash \neg p$$

   解答. 利用反证法，等价于需要证明：

   $$\{(p \vee q) \to (r \wedge s), (s \vee t) \to u, p\} \vdash 0$$

   (1) p　　前提引入
   (2) $p \to \neg q$　　前提引入
   (3) $\neg q$　　1,2 分离
   (4) $\neg r \wedge q$　　前提引入
   (5) $\neg r$　　3,4 拒取三段论
   (6) $r \wedge \neg s$　　前提引入
   (7) r　　6 化简
   (8) $\neg r \wedge r$　　5,7 合取引入

(9) 0 8 置换

不利用反证法，直接构造下列证明:

(1) $r \wedge \neg s$ 前提引入

(2) r 1 化简

(3) $\neg r \vee q$ 前提引入

(4) q 2,3 拒取三段论

(5) $p \to \neg q$ 前提引入

(6) $\neg p \vee \neg q$ 5 置换

(7) $\neg p$ 4,6 拒取三段论

□

3. 在一阶逻辑中，分别在 (a)，(b) 时将下列命题符号化，并讨论个命题的真值。

- 凡是整数都能被 2 整除。
- 有的整数不能被 2 整除。

(a) 个体域为自然数集合 $\mathbb{N}$。

(b) 个体域为实数集合 $\mathbb{R}$。

解答. 令 $P(x)$ 表示 x 能被 2 整除，$Q(x)$ 表示为 x 是整数，则在 $\mathbb{N}$ 中:

- 命题可以表示为 $\forall x P(x)$，为假命题。
- 命题可以表示为 $\exists x Q(x)$，为真命题。

在 $\mathbb{R}$ 中:

- 命题可以表示为 $\forall x Q(x) \to P(x)$，为假命题。
- 命题可以表示为 $\exists x Q(x) \wedge P(x)$，为真命题。

□

4. 在一阶逻辑中将下列命题符号化，这里个体域是全总个体域。

(1) 没有不能表示成分数的有理数。

(2) 乌鸦都是黑色的。

(3) 不存在比所有火车都快的汽车。

(4) 说凡是汽车就比火车慢是不对的。

解答.

(1) 令 $P(x)$ 表示 x 是有理数，$Q(x)$ 表示 x 是分数，则该命题可以表示为 $\neg\exists x(P(x) \wedge \neg Q(x))$。

(2) 令 $P(x)$ 表示 x 在是乌鸦，$Q(x)$ 表示 x 是黑色的，则该命题可以表示为 $\forall x(P(x) \to Q(x))$。

(3) 令 $P(x)$ 表示 x 是火车，$Q(x)$ 表示 x 是汽车，$R(x, y)$ 表示 x 比 y 快，则该命题可以表示为 $\neg(\exists x \forall y Q(x) \wedge (P(y) \to R(x, y)))$。

(4) 令 $P(x)$ 表示 x 是火车，$Q(x)$ 表示 x 是汽车，$R(x, y)$ 表示 x 比 y 慢，则该命题可以表示为 $\neg(\forall x \forall y((P(x) \wedge Q(y)) \to R(y, x)))$。

□

5. 假设符号集包括常量 a, 函数 f，谓词符号 F, G。给定解释 $I = (\mathbb{R}, \mathfrak{a})$ 和赋值 σ 如下:

(1) 个体域为实数集合 $\mathbb{R}$。

(2) $\mathfrak{a}(a) = 0$。

(3) $\mathfrak{a}(f)(x, y) = xy + x + y$.

(4) $\mathfrak{a}(F)(x, y) = x \equiv y,\ \mathfrak{a}(G)(x, y) = x > y$.

(5) $\sigma(x) = 1,\ \sigma(y) = -1$

给出下列公式在 I 和 σ 下的解释，并指出它们的真值。

(1) $\forall x(G(x, y) \to \exists y F(x, y))$.

(2) $\forall y(F(f(x, y), a) \to \forall x G(x, y))$.

解答.

(1) $\forall x((x > -1) \to (\exists y\ x \equiv y))$，真命题。

(2) $\forall y((1 + y \equiv 0) \to (\forall x\ x > y))$，假命题。

□