

第 5 次作业-solution

Lecturer: 杨启哲

Last modified: 2025 年 3 月 25 日

1. 分别给出一个成真和成假的解释, 来说明下列公式是可满足式。

$$(1) \exists x F(x) \rightarrow F(x).$$

$$(2) \exists (F(x) \wedge \forall y (G(y) \wedge H(x, y))).$$

解答. 不妨假定个体域均为自然数集合 $\mathbb{N}$ 。

- 考察解释 $\mathfrak{J}_1$, 其中 $\sigma(x) = 1, a(F)(x) = x > 1$, 则上述公式在该解释下为 $(\exists x x > 1) \rightarrow (1 > 1)$, 为假。
考察解释 $\mathfrak{J}_2$, 其中 $\sigma(x) = 2, a(F)(x) = x > 1$, 则上述公式在该解释下为 $(\exists x x > 1) \rightarrow (2 > 1)$, 为真。
- 考察解释 $\mathfrak{J}_1$, 其中 $a(F)(x) = x > 1, a(G)(x) = x > 0, a(H)(x, y) = x > y$, 则上述公式在该解释下为 $\exists x ((x > 1) \wedge \forall y ((y > 0) \wedge (x > y)))$, 为假。
考察解释 $\mathfrak{J}_2$, 其中 $a(F)(x) = x > 1, a(G)(x) = x > 0, a(H)(x, y) = x + y > 0$, 则上述公式在该解释下为 $\exists x ((x > 1) \wedge \forall y ((y > 0) \wedge (x + y > 0)))$, 为真。

□

2. 判断下列公式的类型:

$$(1) F(x) \rightarrow \forall x F(x).$$

$$(2) \forall x (F(x) \rightarrow G(x)) \rightarrow (\forall x F(x) \rightarrow \forall x G(x)).$$

解答.

(1) 该公式为可满足式。

- 令解释 $\mathfrak{J}$ 取为 $\mathfrak{J} = (\mathfrak{A} = (\mathbb{R}, a), \sigma)$, 其中 $a(F)(x) = x \geq 0$, 赋值 σ 满足; $\sigma(x) = 1$, 则该公式在 I 下为假。
- 令解释 $\mathfrak{J}$ 取为 $\mathfrak{J} = (\mathfrak{A} = (\mathbb{N}, a), \sigma)$, 其中 $a(F)(x) = x \geq 0$, 赋值 σ 满足; $\sigma(x) = 1$, 则该公式在 I 下为真。

(2) 该公式为永真式。考察任意一个解释 $\mathfrak{J} = (\mathfrak{A}, \sigma)$, 其中 $\mathfrak{A} = (D, a)$:

- 若在 $\mathfrak{J}$ 下 $\forall x (F(x) \rightarrow G(x))$ 为假, 则整个公式在 $\mathfrak{J}$ 下为真。
- 若在 $\mathfrak{J}$ 下 $\forall x (F(x) \rightarrow G(x))$ 为真, 则对任意的 $a \in D$, 均有 $a(F)(a) \rightarrow a(G)(a)$; 若存在 a 使得 $a(F)(a)$ 为假, 则 $\forall x F(x)$ 在 $\mathfrak{J}$ 下为假, 从而 $\forall x F(x) \rightarrow \forall x G(x)$ 在 $\mathfrak{J}$ 下为真; 若对任意的 $a \in D$, 均有 $a(F)(a)$ 为真, 则对任意的 $a \in D$, 均有 $a(G)(a)$ 为真, 从而 $\forall x F(x) \rightarrow \forall x G(x)$ 在 $\mathfrak{J}$ 下为真。

因此整个公式在 $\mathfrak{J}$ 下为真，由 $\mathfrak{J}$ 的任意性可知该公式为永真式。

□

3. 设个体域为 $\{a, b\}$ ，消去下列各式的量词：

(1) $\forall x \exists y P(x, y)$.

(2) $\exists x (P(x, y) \rightarrow \exists y Q(y))$.

解答.

- $(P(a, b) \vee P(a, a)) \wedge (P(b, a) \vee P(b, b))$.
- $(P(a, y) \rightarrow (Q(a) \vee Q(b))) \vee (P(b, y) \rightarrow (Q(a) \vee Q(b)))$

□

注 0.1

(1) 还是关键要区分 **自由变元** 和 **约束变元**。

(2) 也可以对公式进行等值演算进行简化，如第二问可简化为：

$$(P(a, y) \wedge P(b, y)) \rightarrow (Q(a) \vee Q(b))$$

4. 利用定义证明 $(\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)) \leftrightarrow (\forall x (P(x) \wedge Q(x)))$ 是永真式，并给出一个解释说明当 $\wedge$ 换成 $\vee$ 上式就不是永真式了。

解答. 考察任意一个解释 $\mathfrak{J} = (\mathfrak{A}, \sigma)$ ，其中 $\mathfrak{A} = (D, \alpha)$ ：

- 若在 $\mathfrak{J}$ 下 $\forall x (P(x) \wedge Q(x))$ 为真，则对任意的 $a \in D$ ，均有 $\alpha(P)(a) \wedge \alpha(Q)(a)$ 为真，从而 $\forall x P(x)$ 和 $\forall x Q(x)$ 在 $\mathfrak{J}$ 下为真。
- 若在 $\mathfrak{J}$ 下 $\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$ 为真，则 $\forall x P(x)$ 和 $\forall x Q(x)$ 在 $\mathfrak{J}$ 下均为真，即对任意的 $a \in D$ ，均有 $\alpha(P)(a)$ 和 $\alpha(Q)(a)$ 为真，从而 $\forall x (P(x) \wedge Q(x))$ 在 $\mathfrak{J}$ 下为真。

因此整个公式在 $\mathfrak{J}$ 下为真，由 $\mathfrak{J}$ 的任意性可知该公式为永真式。

若换成 $\vee$ 则不再为永真式，考察如下的一个解释 $\mathfrak{J}$ 取为 $\mathfrak{J} = (\mathfrak{A} = (\mathbb{Z}, \alpha), \sigma)$ ，其中：

- $\alpha(P)(x) = x$ 为偶数
- $\alpha(Q)(x) = x$ 为奇数。

则 $\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$ 在 $\mathfrak{J}$ 下为假，而 $\forall x (P(x) \vee Q(x))$ 在 $\mathfrak{J}$ 下为真，从而上述公式为假。

□

5. 求下列各式的前束范式：

(1) $\forall x P(x) \rightarrow \exists x Q(x)$.

(2) $\exists x_1 F(x_1, x_2) \rightarrow (F(x_3) \rightarrow \neg \forall x_2 G(x_2, x_1))$.

解答.

- $\exists u \exists x (P(u) \rightarrow Q(x)).$
- $\forall v \exists u (F(v, x_2) \rightarrow (F(x_3) \rightarrow \neg G(u, x_1)))$

□

注 0.2

需要注意，量词前移的时候可能会发生量词的改变。