离散数学 Week 8

第 8 次作业-solution

Lecturer: 杨启哲 Last modified: 2025 年 4 月 15 日

1. 给定 $A=\{1,2,3,4\}$ 和其上的关系 $R=\{(1,2),(1,4),(2,3),(3,4)\}$，请问：

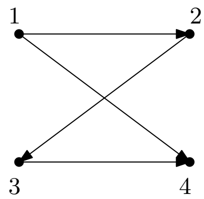
- R 的关系图和关系矩阵是怎么样的？
- R 满足什么关系？（自反、反自反、对称、反对称、传递？）
- 求 R 的自反闭包、传递闭包、对称闭包和自反对称传递闭包。

注 0.1

这里需要指出的是自反对称传递闭包指的是最小的包含该关系并且满足自反性、对称性、传递性的集合，并不是先求传递闭包，再求对称闭包，最后求自反闭包。

解答.

(1) 关系图和关系矩阵如图1所示：



$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

图 1: 关系图与关系矩阵

(2) R 是反自反的、反对称的。

(3) R 的各类闭包如下：

- $r(R)=R\cup R^0=\{(1,2),(1,4),(2,3),(3,4),(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$.
- $s(R)=R\cup R^{-1}=\{(1,2),(1,4),(2,3),(3,4),(2,1),(4,1),(3,2),(4,3)\}$
- $t(R)=\bigcup_{i=1}^{\infty}R^i=\{(1,2),(1,4),(2,3),(1,3),(1,4),(3,4),(2,4)\}$
- 其自反传递对称闭包为全关系：$tsr(R)=E_A$.

□

2. 令 R 是集合 A 上的一个关系，证明：$s(t(R))\subseteq t(s(R))$.

解答. 注意到 $t(s(R))$ 也是对称的，这是因为：

$$\begin{aligned} &\forall (x,y)\in t(s(R)), \exists z_1\cdots z_k\in A,\ (x,z_1)\in s(R),\cdots,(z_k,y)\in s(R)\\ \Rightarrow &(z_k,x)\in s(R),\cdots,(y,z_1)\in s(R)\Rightarrow (y,x)\in t(s(R))\end{aligned}$$

从而:

$$R \subseteq s(R) \Rightarrow t(R) \subseteq t(s(R)) \Rightarrow s(t(R)) \subseteq s(t(s(R))) = t(s(R))$$

□

3. 设 R 是 A 上的自反传递关系，证明 $R \cap R^{-1}$ 是等价关系。

解答. 令 $T = R \cap R^{-1}$，则:

(1) R 是自反的，从而 R^{-1} 也是自反的，即 $I_A \subseteq R \cap R^{-1} = T$，$T$ 是自反的。

(2) $\forall (x,y) \in T, (x,y) \in R, (x,y) \in R^{-1}$，从而 $(y,x) \in R, (y,x) \in R^{-1}$，即：$(y,x) \in R^{-1}$，$T$ 是对称的。

(3) $\forall (x,y),(y,z) \in T$，有 $(x,y),(y,z) \in R$ 和 $(x,y),(y,z) \in R^{-1}$，由于 R 和 R^{-1} 是传递的，$(x,z) \in R$，$(z,x) \in R^{-1}$，即 $(x,z) \in T$，T 是传递的。

□

4. 对于给定的集合 A 和关系 R，判定 R 是否是 A 上的等价关系，并给出证明。

(1) $A = \{1,2,3\}, R = \{(x,y) \mid x+y \neq 3, x,y \in A\}$,

(2) $A = \mathscr{P}(S)$，这里 S 是一个超过两个元素的集合，$R = \{(X,Y) \mid X \subseteq Y, X, Y \in A\}$.

(3) $A = \mathscr{P}(S)$，这里 S 是一个超过两个元素的集合，$R = \{(X,Y) \mid X \subseteq Y \vee Y \subseteq X, X, Y \in A\}$.

从而 T 是自反的、对称的、传递的，因而是一个等价关系。

解答.

(1) R 不是等价关系。因为 R 不是传递的，例如 $(1,3) \in R, (3,2) \in R$ 但是 $(1,2) \notin R$.

(2) R 不是等价关系。因为 R 不是对称的，考虑 S 中的真子集 X，有 $X \subseteq S$，但 $S \not\subseteq X$，从而 $(X,S) \in R$ 但 $(S,X) \notin R$。

(3) R 不是等价关系,因为 R 不是传递的,考虑 S 的两个不相交的真子集 X,Y,我们有 $(X,S),(S,Y) \in R$，但由选法 $(X,Y) \notin R$.

□

5. 设 π 是正整数集 $\mathbb{Z}^+$ 的子集族 $\pi = \{S_1, S_2, S_3\}$，满足:

- $S_1 = \{1\}$;
- $S_2 = \{x \mid x是质数\}$;
- $S_3 = \{x \mid x是合数\}$。

(1) 证明 π 是 $\mathbb{Z}^+$ 的一个划分。

(2) 定义如下关系 R:

$$\forall x, y \in \mathbb{Z}^+,\ xRy \Rightarrow \exists S \in \pi,\ x, y \in S$$

证明 R 是 $\mathbb{Z}^+$ 上的等价关系。

(3) 写出商集 $\mathbb{Z}^+/R$。

注 0.2

这个例子希望大家对等价关系和划分能有一个统一的理解。

解答.

(1) 注意到 $S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \mathbb{Z}^+$，并且对于任意的 $i, j \in \{1, 2, 3\}$ 有:

$$S_i \cap S_j = \emptyset$$

从而 π 是 $\mathbb{Z}^+$ 的一个划分。

(2) 只需证明 R 满足自反性、对称性和传递性即可:

- 自反性: $\forall x \in \mathbb{Z}^+$, $\exists i\ x \in S_i \Rightarrow xRx$，因此 R 满足自反性。
- 对称性: $\forall x, y \in \mathbb{Z}^+$, $xRy \Rightarrow \exists i,\ x, y \in S_i \Rightarrow yRx$，因此 R 满足对称性。
- 传递性: $\forall x, y, z \in \mathbb{Z}^+$, $xRy \wedge yRz \Rightarrow \exists i, j,\ x, y \in S_i, y, z \in S_j \Rightarrow y \in S_i \cap S_j \Rightarrow i = j \Rightarrow x, z \in S_i \Rightarrow xRz$，因此 R 满足传递性。

注 0.3

这里传递性的证明用到了，在一个划分中，两个集合的交集要么为空，要么相等。

(3) $\mathbb{Z}^+/R = \{S_1, S_2, S_3\}$，即一个划分就刻画了该集合上的一种等价关系。

□