

第 9 次作业-solution

Lecturer: 杨启哲

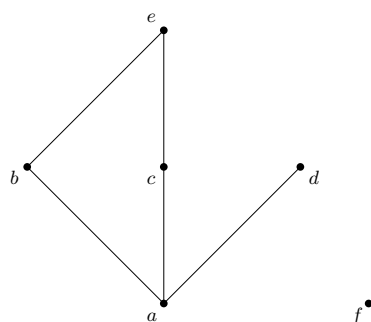
Last modified: 2025 年 4 月 22 日

1. 画出如下偏序集的 Hasse 图:

$$A = \{a, b, c, d, e, f\}, \quad R_{\leq} = \{(a, d), (a, c), (a, b), (a, e), (b, e), (c, e)\} \cup I_A$$

并指出 A 的极大元、极小元、最大元和最小元。

解答. 其 Hasse 图如下所示:



- 极小元: a, f
- 极大元: e, d, f
- 最小元: 无
- 最大元: 无

□

2. 设 (A, R) 是偏序集, 在 A 上定义新的关系 S 如下: $\forall x, y \in A, xSy \Leftrightarrow yRx$, 并称 S 为 R 的对偶关系。

(1) 证明: S 也是 A 上的偏序关系。

(2) 如果 R 是整数集合上的小于等于关系, 则 S 是什么关系? 如果 R 是正整数集合上的整除关系, 则 S 是什么关系?

解答.

(1) 要证明 S 是 A 上的偏序关系, 只要证明 S 满足自反性、反对称性和传递性即可。

- 自反性: $\forall x \in A, xRx \Rightarrow xSx$, 因此 S 满足自反性。
- 反对称性: $\forall x, y \in A, xSy \wedge ySx \Rightarrow yRx \wedge xRy \Rightarrow x = y$, 因此 S 满足反对称性。
- 传递性: $\forall x, y, z \in A, xSy \wedge ySz \Rightarrow yRx \wedge zRy \Rightarrow zRx \Rightarrow xSz$, 因此 S 满足传递性。

- (2) 如果 R 是整数集合上的小于等于关系, 则 S 是整数集合上的大于等于关系。如果 R 是正整数集合上的整除关系, 则 S 是正整数集合上的被整除关系。

□

3. 设 (A, R_1) 和 (B, R_2) 是两个偏序集, 定义 $A \times B$ 上的关系 R 如下:

$$R = \{((a_1, b_1), (a_2, b_2)) \mid (a_1, a_2) \in R_1 \wedge (b_1, b_2) \in R_2\}.$$

证明 R 是 $A \times B$ 上的偏序关系。

解答. 只要证明 R 满足自反性、反对称性和传递性即可。

- (1) 注意到对任意的 $(a, b) \in A \times B$:

$$(a, a) \in R_1 \wedge (b, b) \in R_2 \Rightarrow ((a, b), (a, b)) \in R$$

从而 R 满足自反性。

- (2) 注意到对任意的 $((a_1, b_1), (a_2, b_2)) \in R$:

$$(a_1, a_2) \in R_1 \wedge (b_1, b_2) \in R_2 \Rightarrow (a_2, a_1) \in R_1 \wedge (b_2, b_1) \in R_2 \Rightarrow ((a_2, b_2), (a_1, b_1)) \in R$$

从而 R 满足对称性。

- (3) 注意到对任意的 $((a_1, b_1), (a_2, b_2)), ((a_2, b_2), (a_3, b_3)) \in R$:

$$((a_1, b_1), (a_2, b_2)) \in R \Rightarrow (a_1, a_2) \in R_1 \wedge (b_1, b_2) \in R_2$$

$$((a_2, b_2), (a_3, b_3)) \in R \Rightarrow (a_2, a_3) \in R_1 \wedge (b_2, b_3) \in R_2$$

$$\Rightarrow (a_1, a_3) \in R_1 \wedge (b_1, b_3) \in R_2 \Rightarrow ((a_1, b_1), (a_3, b_3)) \in R$$

从而 R 满足传递性。

□

4. 判断下列函数是否是单射、满射、双射, 并给予证明。

$$(1) f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, f(x) = x^2.$$

$$(2) f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 是 } 2 \text{ 的幂} \\ 0, & x \text{ 不是 } 2 \text{ 的幂} \end{cases}$$

$$(3) f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+, f(x) = \frac{1}{x+1}$$

$$(4) f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}, f(x, y) = \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2}\right)$$

解答.

- (1) 不是单射, 因为 $f(1) = f(-1) = 1$; 不是满射, 因为 $f(x) = 1$ 无解; 不是双射。

- (2) 不是单射, 因为 $f(0) = f(3) = 1$; 不是满射, 因为 $f(x) = 5$ 无解; 不是双射。

(3) f 是单射, 因为 $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$; f 不是满射, 因为 $f(x) = 10$ 无解, f 不是双射。

(4) 是单射, 因为 $f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2) \Rightarrow x_1 = x_2, y_1 = y_2$; f 是满射, 因为对任意 $x, y \in \mathbb{R}$ 有 $f((x+y, x-y)) = (x, y)$; 因此 f 是双射。

□

5. 令 A, B 是两个有限集满足 $|A| = m, |B| = n$, 考虑如下问题:

(1) A 到 B 的函数有多少个?

(2) A 到 B 的满射有多少个?

(3) A 到 B 的单射有多少个? 并且由上述结论回答, A 到 B 的双射有多少个?

解答.

(1) 每个元素都有 n 种选择, 因此有 n^m 个函数。

(2) 满射的个数等于函数的个数减去不满射的个数, 因此由容斥原理可得一共有:

$$n^m - \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i+1} \binom{n}{i} (n-i)^m$$

个满射函数。

(3) 单射的个数可以这样计算: 先从 B 中选出 m 个元素, 然后对这 m 个元素进行全排列, 因此有 $m! \cdot \binom{n}{m}$ 个单射函数; 当 $m \neq n$ 时, 双射个数为 0; 当 $m = n$ 时, 双射个数就是其单射个数, 即 $m! \cdot \binom{n}{m} = n!$ 。

□