第 9 次作业

Lecturer: 杨启哲

Last modified: 2025 年 4 月 15 日

截止日期 2025 年 4 月 21 日晚 24: 00

1. 画出如下偏序集的 Hasse 图:

$$A = \{a, b, c, d, e, f\}, \quad R_{\leq} = \{(a, d), (a, c), (a, b), (a, e), (b, e), (c, e)\} \cup I_A$$

并指出 A 的极大元、极小元、最大元和最小元。2. 设 (A, R) 是偏序集, 在 A 上定义新的关系 S 如下: $\forall x, y \in A, xSy \Leftrightarrow yRx$, 并称 S 为 R 的对偶关系。(1) 证明: S 也是 A 上的偏序关系。(2) 如果 R 是整数集合上的小于等于关系, 则 S 是什么关系? 如果 R 是正整数集合上的整除关系, 则 S 是什么关系?3. 设 (A, R_1) 和 (B, R_2) 是两个偏序集, 定义 $A \times B$ 上的关系 R 如下:

$$R = \{((a_1, b_1), (a_2, b_2)) \mid (a_1, a_2) \in R_1 \wedge (b_1, b_2) \in R_2\}.$$

证明 R 是 $A \times B$ 上的偏序关系。

4. 判断下列函数是否是单射、满射、双射, 并给予证明。

(1) $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, f(x) = x^2$.

(2) $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 是 } 2 \text{ 的幂} \\ 0, & x \text{ 不是 } 2 \text{ 的幂} \end{cases}$

(3) $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+, f(x) = \frac{1}{x+1}$

(4) $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}, f(x, y) = (\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2})$

5. 令 A, B 是两个有限集满足 $|A| = m, |B| = n$, 考虑如下问题:(1) A 到 B 的函数有多少个?(2) A 到 B 的满射有多少个?(3) A 到 B 的单射有多少个? 并且由上述结论回答, A 到 B 的双射有多少个?