



上海师范大学
Shanghai Normal University

《离散数学》

12-组合计数基础 (Combinatorial Counting)

杨启哲

上海师范大学信机学院计算机系

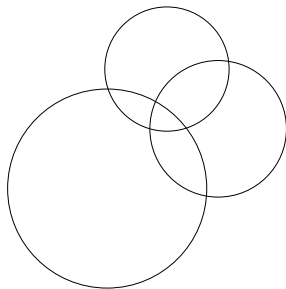
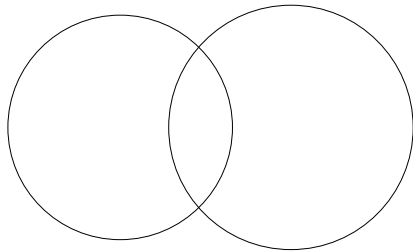
2025 年 5 月 28 日

组合问题举例

相互重叠的圆 (I)

假设平面上有 n 个圆，这些圆两两相交于两个不同的顶点，这里我们指的是没有两个圆是相切或者不相交的，并且没有三个圆交于同一点。

问题是，这些圆将平面分成了多少个区域？

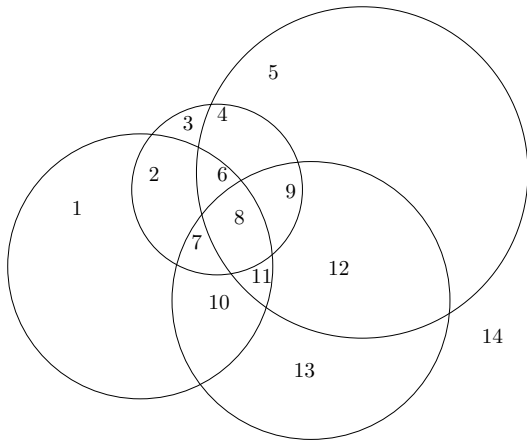


相互重叠的圆 (II)

令 h_n 表示 n 个圆对平面的划分数，不难发现：

- $h_1 = 2, h_2 = 4, h_3 = 8$

很容易猜测， $h_n = 2^n$ 。但很遗憾， $n = 4$ 的时候就出现了问题：



我们用另一种方式来求得 h_n ，这是一种常见得方式，即从 h_{n-1} 的基础上去考虑 h_n ：

- 假设现在平面上已经有放置好的前 $n-1$ 个圆 $\gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}$ ，其将平面划分成了 h_{n-1} 个部分。
- 现在我们画上第 n 个圆 γ_n ，由假设， γ_n 会和每个 γ_i 有 2 个交点，从而 γ_n 上一共有 $2n-2$ 个交点，即 $2n-2$ 条弧。
- 每条弧都会对应产生一个新的区域，从而我们有：

$$h_n = h_{n-1} + 2n - 2$$

计算上述递推式可得， $h_n = n^2 - n + 2 (n \geq 2)$



Nim 是一种两个人玩的游戏，玩家双方面对一堆硬币（或者石头或者豆数），假设有 $k \geq 1$ 堆硬币，每堆硬币分别有 $n_1, \dots, n_k$ 。游戏的规则如下：

1. 玩家轮番出场，我们分别记为 I 号玩家和 II 号玩家。
2. 当轮到一个人玩家出场时，其可以选择一堆硬币堆，从中拿去至少一枚硬币，当然玩家也可以选择拿走整堆硬币，从而这个硬币堆变成空堆，我们视作其退出游戏。
3. 游戏的目标在于拿走最后一枚硬币，即拿走最后一枚硬币的玩家获得胜利。

问题是，对于给定的一堆硬币，我们如何判断玩家是否有必胜策略？

我们从简单的情况开始讨论起：

$k = 1$ 的情况：只有一堆硬币的时候显然是先手必胜，只需要直接拿光就可以了！

$k = 2$ 的情况：我们宣称是否存在先手必胜策略只依赖于 $n_1 = n_2$ 。假设 $n_1 \neq n_2$ ，则

1. 玩家 I 首先拿走一些硬币使得剩下的两堆硬币相等。
2. 再剩余的回合数，玩家 I 模仿玩家 II 的取法。

不难验证上述是 $n_1 \neq n_2$ 的先手必胜策略，也是 $n_1 = n_2$ 情况下的后手必胜策略。

上述例子可以发现，核心策略实际上是要能完成某种模仿的后手获胜场景。那我们现在来推广到一般的情况。为了在任意堆中刻画相等的概念，我们引入对二进制的刻画。假设 $n_1, \dots, n_k$ 都可以表示成 l 位二进制（不足的用 0 表示）：

$$\begin{aligned}n_1 &= (n_{1l}n_{1(l-1)} \dots n_{11})_2 \\n_2 &= (n_{2l}n_{2(l-1)} \dots n_{21})_2 \\&\dots \\n_k &= (n_{kl}n_{k(l-1)} \dots n_{k1})_2\end{aligned}$$

定义 1

[平衡 Nim 游戏].

一个 Nim 游戏是平衡的，当且仅当对任意的 $s \in \{1, \dots, l\}$ ， $\sum_{j=1}^k n_{js}$ 都是偶数。

例 2.

考察一个 4 堆 Nim 游戏，其堆的大小分别为 7, 9, 12, 15。注意到：

	$2^3 = 8$	$2^2 = 4$	$2^1 = 2$	$2^0 = 1$
7	0	1	1	1
9	1	0	0	1
12	1	1	0	0
15	1	1	1	1

该游戏是不平衡的，但是把其中的 7 换成 10，我们就获得了一个平衡的 Nim 游戏。

定理 3.

先手玩家在非平衡 Nim 游戏中有必胜策略，后手玩家在平衡 Nim 游戏中有必胜策略。

证明：我们只需要证明，玩家 I 总有方法使得不平衡的 Nim 游戏变为平衡 Nim 游戏。令 j 为最大不平衡位，随机选择一个第 j 位不为 0 的堆，不妨假设为 n_t ，则对应取法如下：

- 先取走一枚硬币。
- 如果对于 $i < j$ 现在是平衡的，则取走 2^i 枚硬币。
- 如果对于 $i < j$ 现在是不平衡的：
 - 若 $n_{ti} = 0$ ，则不取走硬币。
 - 若 $n_{ti} = 1$ ，则取走 2^{i+1} 枚硬币。

容易验证，上述取法可以使得游戏变为平衡的 Nim 游戏。

上述我们给出了两个简单的组合问题。第一个问题有关计数，第二个问题则有关奇偶。而在接下来的课程中，我们将进一步对计数进行一些介绍。让我们先回顾一些计数中的重要方法。

加法原理

设集合 S 被划分成两两不相交的部分 $S_1, S_2, S_3, \dots, S_m$ 。则 S 的对象项目可以通过确定它的每一个部分的对象数目并相加得到：

$$|S| = |S_1| + |S_2| + \dots + |S_m|$$

乘法原理

令 S 是有序对 (a, b) 组成的集合，其中 a 来自大小为 p 的集合，而且对于每个选择 a ， b 有 q 种选择。从而 S 的大小满足：

$$|S| = p \times q$$

减法原理

令 A 是一个集合，而 U 是包含 A 的更大集合。令 $\bar{A}$ 是 A 在 U 中的补集，则 A 中元素的数目可以由下列等式给出：

$$|A| = |U| - |\bar{A}|$$

除法原理

令 S 是一个有限集合，将其划分成 k 个部分使得每一部分包含的对象数目相同。则此划分的部分数目 k 可以如下得出：

$$k = \frac{|S|}{\text{在一个部分中的对象数目}}$$

当然容斥原理也是一种非常常用的计数方法:

定理 4

[容斥原理].

令 $A_1, \dots, A_n$ 是有限集合, 则我们有:

- $|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|.$
- $|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \dots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n|.$

组合数

让我们先来回顾一个组合数的定义：

定义 5

[组合数].

对于非负整数 n 和 k ，我们定义：

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)(k-2)\cdots 1} = \frac{\prod_{i=0}^{k-1} (n-i)}{k!}$$

其中 $n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 1$ 。

一些说明

1. 也常用 C_k^n 表示 $\binom{n}{k}$ 。
2. 另外一个常见的计算表达式为 $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ 。
3. 其也被称作二项式系数 (Binomial Coefficient)。

组合数实际上表示了一个 n 个元素的集合中大小为 k 的子集个数。

定义 6.

令 X 是任一集合, k 是一个非负整数, 定义:

$$\binom{X}{k}$$

为 X 的大小为 k 的子集的集合。

引理 7.

对于任意集合 X , 我们有:

$$\left| \binom{X}{k} \right| = \binom{|X|}{k}$$

证明: [引理??的证明]

- 在 n 个元素中, 选取 k 个有序组一共有 $n(n-1)\cdots(n-k+1)$ 种情况。
- 对于任何一个大小为 k 的子集, 我们可以构建出 $k!$ 个不同的有序组。

从而我们有:

$$k! \cdot \left| \binom{X}{k} \right| = n(n-1)\cdots(n-k+1)$$

即:

$$\left| \binom{X}{k} \right| = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \binom{|X|}{k}$$

现在让我们考虑如下方程：

$$x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_k = n$$

该方程有多少个不同的正整数解？

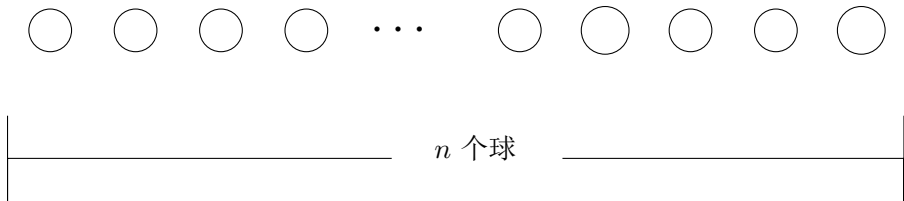
特殊情况

可以看到特殊情况还是好算的：

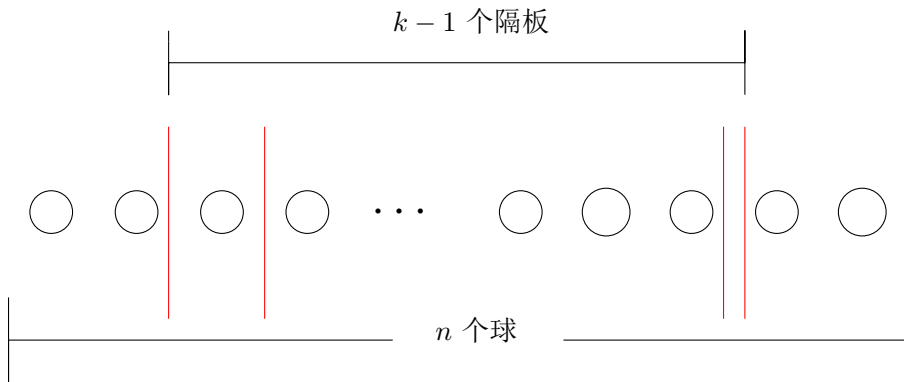
- $k = 2$ 时有 $n - 1$ 个不同的解。
- $n = k + 1$ 时有 n 个不同的解。

求解上述方程的非负整数解个数 (I)

我们将 n 看成排成一排的 n 个球，而 k 则看成 $k-1$ 个隔板：



求解上述方程的非负整数解个数 (II)



- 我们不允许隔板放在同一个位置。
- 这 $k-1$ 个隔板把球分成了 k 个部分，每个部分至少包含一个球。

求解上述方程的非负整数解个数 (III)

可以看到，每一种放置隔板的方案都对应了一个方程的解。而每个放置隔板的方案等价于从这 $n-1$ 个空里挑选一个大小为 $k-1$ 的子集，从而我们有：

$$\text{方程的解个数} = \binom{n-1}{k-1}$$

定理 8.

方程 $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_k = n$ 的不同正整数解个数为 $\binom{n-1}{k-1}$

推论 9.

方程 $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_k = n$ 的不同非负整数解个数为 $\binom{n+k-1}{k-1}$

引理 10.

对于任意的 $n, k \geq 0$, 我们有:

- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
- $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$

证明:

- 通过定义可以直接获得。当然从组合的意义上也是一样的, 因为在 n 个元素的集合里, 大小为 k 的子集个数和大小为 $n-k$ 的子集个数是相同的, 其形成一个一一对应。
- 我们可以通过计算的方式得到证明:

$$\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

证明： 我们也可以用组合的方式来证明上述第二个式子：

- 等式左边是 n 个元素取 k 个的取法个数。
- 关于等式右边，让我们来思考这取 k 个的取法：
 - 如果我们选取了第 n 个元素，那么我们还需要从剩下的 $n - 1$ 个元素中选取 $k - 1$ 个元素，那是 $\binom{n-1}{k-1}$ 。
 - 如果我们没有选取第 n 个元素，那么我们还需要从剩下的 $n - 1$ 个元素中选取 k 个元素，那是 $\binom{n-1}{k}$ 。

从而我们有：

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

利用上面的公式我们不难得到下述杨辉三角形：

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 1 & & \\ & & & 1 & & 1 & \\ & & 1 & & 2 & & 1 \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\ 1 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\ & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\ & & & & & \dots & & & & & \end{array}$$

定理 11.

对于任意的非负整数 n ，我们有：

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$$

引理 12.

对于任意的 $n, k \geq 0$, 我们有:

- $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$ 。
- $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0$ 。
- $\sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n}$

证明:

- 在 $(1+x)^n$ 中令 $x=1$ 即得。
- 在 $(1+x)^n$ 中令 $x=-1$ 即得。

证明: [证明续] 我们用一种组合的方式来证明最后一个式子。不难发现, 等式左边可以变形为:

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \binom{n}{n-i}$$

我们现在来证其 $= \binom{2n}{n}$:

- 我们考虑从 $2n$ 个元素中选取 n 个元素的方案数, 其是 $\binom{2n}{n}$ 。
- 我们可以从另一个方面计算这个方案数, 将 $2n$ 个元素分成两个大小为 n 的集合, 分别记为 A 和 B , 则我们可以:
 - 从 A 中选取 i 个元素。
 - 从 B 中选取 $n-i$ 个元素。

从而我们有 $2n$ 个元素中选取 n 个元素的方案数为:

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \binom{n}{n-i}$$

即: $\sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2 = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \binom{n}{n-i} = \binom{2n}{n}$ 。

引理 13.

证明下列恒等式:

$$\sum_{i=\max\{0, \lceil \frac{n-k}{2} \rceil\}}^n (-1)^{n-i} \binom{n}{i} \binom{2i+k}{n} = 2^n$$

证明: 我们构造一个计数情景。假设有 n 个颜色的球, 每种颜色的球恰好有 2 个, 此外还有 k 个无色球。我们考虑从这 $2n+k$ 个球中选取 n 个不同颜色球的方案数 (不包括无色球)。

我们可以从两个方面来计算这个方案数:

- 记 S 为所有满足要求的选法集合, 显然一共有 2^n 种不同的方案, 即 $|S| = 2^n$ 。
- 我们现在使用另一种计数方式。令 A_j 表示不包含第 j 种颜色的 n 个球的选法集合, 显然我们有:

$$S = \bigcap_{j=1}^n \overline{A_j}$$

证明: [证明续] 现在来考察 $\cap_{j \in J} A_j$ 的大小, 这里 $J \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ 是任何一个大小为 $n - i$ 的子集。注意到 $\cap_{j \in J} A_j$ 是这些满足要么球是无色的, 要么球的颜色属于 $[n] \setminus J$ 中的情况, 即在 $2i + k$ 个球中选取 n 个球的方案数, 从而我们有:

$$|\cap_{j \in J} A_j| = \begin{cases} \binom{2i+k}{n} & \text{如果 } 2i + k \geq n \\ 0 & \text{如果 } 2i + k < n \end{cases}$$

从而由容斥原理:

$$|\cup_{j=1}^n A_j| = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{\substack{J \subseteq [n] \\ |J|=n-i}} (-1)^{n-i+1} |\cap_{j \in J} A_j| = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{n-i+1} \binom{n}{i} \binom{2i+k}{n}$$

因此我们可以获得:

$$|S| = \binom{2n+k}{n} - |\cup_{j=1}^n A_j| = \sum_{i=\max\{0, \lceil \frac{n-k}{2} \rceil\}}^n (-1)^{n-i} \binom{n}{i} \binom{2i+k}{n}$$

即完成了我们的证明。

我们现在来思考一下 $n!$ 的大小:

- $n! = \prod_{i=1}^n i < \prod_{i=1}^n n = n^n$
- $n! = \prod_{i=1}^n i > \prod_{i=2}^n 2 = 2^{n-1}$

由上述讨论我们可以知道:

$$2^{n-1} < n! < n^n$$

但是, $n!$ 究竟是更接近前者, 还是更接近后者? 我们希望给出一个更为准确的答案。

定理 14.

对于任何大于 1 的整数 n , 我们有:

$$n^{\frac{n}{2}} \leq n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$$

证明: 上界是通过均值不等式得到的, 只需要注意:

$$i \cdot (n+1-i) \leq \left(\frac{i+(n+1-i)}{2}\right)^2 = \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$$

从而我们可以得到:

$$n! = \prod_{i=1}^n \sqrt{i(n+1-i)} \geq n^{\frac{n}{2}}$$

下界的证明只需要注意 $i(n+1-i) \geq n$ 即可。这个估计已经比之前的缩小很多了, 但似乎还是有很大的鸿沟。

定理 15.

对于任何大于 1 的整数 n , 我们有:

$$e \left(\frac{n}{e} \right)^n \leq n! \leq en \left(\frac{n}{e} \right)^n$$

证明: 这里只给出上界的证明, 下界的证明是类似的。我们对 n 进行归纳。

$n = 1$ 时左边 $= 1$, 右边 $= 1$, 不等式成立。

假设对 $\leq n - 1$ 成立, 即有 $(n - 1)! \leq e(n - 1) \left(\frac{n-1}{e} \right)^{n-1}$; 则考虑 n 的时候:

$$n! = (n - 1)! \cdot n \leq n \cdot e(n - 1) \left(\frac{n-1}{e} \right)^{n-1} = en \left(\frac{n}{e} \right)^n \cdot e \left(1 - \frac{1}{n} \right)^n \leq en \left(\frac{n}{e} \right)^n$$

最后一步利用了 $\left(1 - \frac{1}{n} \right)^n \leq e^{-1}$ 。

上述的估计已经比较精确了，下面我们不证明的给出一个更为精确的估计，即熟知的斯特林公式：

定理 16

[斯特林公式 (Stirling's formula)].

给定 $n \geq 1$ 为整数，令 $f(n) = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$ ，则我们有：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{n!} = 1$$

现在让我们把目标转向组合数，回顾：

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k(k-1)(k-2)\dots 2 \cdot 1} = \prod_{i=0}^{k-1} \frac{n-i}{k-i}$$

我们立马可以获得一个简单的上下界：

$$\left(\frac{n}{k}\right)^k \leq \binom{n}{k} \leq \frac{n^k}{k!}$$

通过上述对阶乘的估计，我们可以得到一个更紧的界。

定理 17.

对于任何 $n \geq 1$ 和 $1 \leq k \leq n$ 的整数 n, k ，我们有：

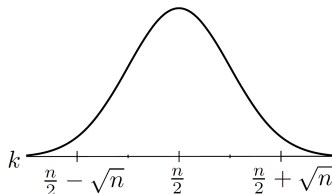
$$\binom{n}{k} \leq \left(\frac{en}{k}\right)^k$$

通过简单的推导，我们不难得到：

$$\binom{n}{k} = \frac{n-k+1}{k} \binom{n}{k-1}$$

这意味着：

- $k \leq \frac{n}{2}$ 时，我们有： $\binom{n}{k} > \binom{n}{k-1}$ 。
- $k \geq \frac{n}{2}$ 时，我们有： $\binom{n}{k+1} < \binom{n}{k}$ 。



一个很自然的问题是, $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ 的大小是多少?

一个很简单的估计是:

$$\frac{2^n}{n+1} \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \leq 2^n$$

上界运用了所有组合数相加, 而下界则是利用了均值原理。

下述定理给出了一个更为精确的估计:

定理 18.

对于任何的整数 $m \geq 1$, 我们有:

$$\frac{2^{2m}}{2\sqrt{m}} \leq \binom{2m}{m} \leq \frac{2^{2m}}{\sqrt{2m}}$$

证明: [定理18的证明]

定义:

$$P_m = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2m-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2m} = \frac{1}{2^{2m}} \binom{2m}{m}$$

则我们只需要证明:

$$\frac{1}{2\sqrt{m}} \leq P_m \leq \frac{1}{\sqrt{2m}}$$

- 对于上界来说, 只需要注意到:

$$(2m+1)P_m^2 = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{(2m)^2}\right) < 1$$

- 对于下界来说, 只需要注意到:

$$\frac{1}{P_m^2} = 2 \cdot (2m) \cdot \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \left(1 - \frac{1}{5^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{(2m-1)^2}\right) < 1$$

生成函数

回顾一个组合数的定义：

定义 19

[组合数].

对于非负整数 n 和 k ，我们定义：

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)(k-2)\cdots 1} = \frac{\prod_{i=0}^{k-1}(n-i)}{k!}$$

其中 $n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 1$ 。

我们研究拓展该定义，研究 n 是一般的实数的情况。

定义 20

[牛顿二项式系数].

对于任意实数 α 和正整数 k ，我们定义：

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}{k(k-1)(k-2)\cdots 1} = \frac{\prod_{i=0}^{k-1}(\alpha-i)}{k!}$$

例 21.

- 当 $\alpha = n$ 为正整数时, 我们有:

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\prod_{i=0}^{k-1} (\alpha - i)}{k!} = \binom{n}{k}$$

- 当 $\alpha = -n$ 为负整数时, 我们有:

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\prod_{i=0}^{k-1} (-n - i)}{k!} = (-1)^k \binom{n + k - 1}{k}$$

- 当 $\alpha = \frac{1}{2}$ 时, 我们有:

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\prod_{i=0}^{k-1} (-\frac{1}{2} - i)}{k!} = \frac{\frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{2} - 1) \cdots (\frac{1}{2} - k + 1)}{k!} = \frac{(-1)^{k-1}}{k \times 2^{2k-1}} \binom{2k-2}{k-1}$$

我们不加证明的给出牛顿二项式定理：

定理 22.

设 α 是实数，则对于所有满足 $0 \leq |x| < |y|$ 的 x 和 y ，有：

$$(x + y)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k y^{\alpha-k}$$

特别的，定理可以等价的表示为对于 $|z| < 1$ ，有：

$$(1 + z)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} z^k$$

例 23.

- 令其中的 $\alpha = -n$ 我们可以得到:

$$\frac{1}{(1+z)^n} = (1+z)^{-n} = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^k \binom{n+k-1}{k} z^k$$

- 将上面的 z 换成 $-z$ 可得:

$$\frac{1}{(1-z)^n} = (1-z)^{-n} = \sum_{i=1}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} z^k$$

- 令 $\alpha = \frac{1}{2}$, 我们有:

$$\sqrt{1+z} = (1+z)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k \times 2^{2k-1}} \binom{2k-2}{k-1} z^k$$

生成函数的想法是将一个数列转换成某个函数的系数，其可以是指数函数，也可以多项式函数。我们这里只介绍多项式函数。

令 $h_0, \dots, h_n, \dots$ 是一个无穷数列，定义其生成函数为如下的无穷级数：

$$g(x) = h_0 + h_1x + h_2x^2 + h_3x^3 + \dots$$

关于有穷数列的生成函数

有穷数列 $h_0, \dots, h_n$ 也可以定义相应的生成函数，只需将该数列看成如下的无穷数列即可：

$$h_0, \dots, h_n, 0, 0, 0, \dots$$

例 24.

- 每一项都等于 1 的无穷数列 $1, 1, \dots$ 的生成函数为:

$$g(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x}$$

- 对于有穷数列 $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \dots, \binom{n}{n}$ 的生成函数为:

$$g(x) = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \dots + \binom{n}{n}x^n = (1+x)^n$$

- 对于无穷数列 $\binom{\alpha}{0}, \binom{\alpha}{1}, \dots, \binom{\alpha}{n} \dots$ 的生成函数为:

$$g(x) = \binom{\alpha}{0} + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \dots + \binom{\alpha}{n}x^n + \dots = (1+x)^\alpha$$

再论 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k$ 的非负整数解

我们再来回顾一下： $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k$ 的非负整数解。由之前的讨论我们可知该方程一共有 $\binom{k+n-1}{n-1}$ 个不同的整数解。

现在我们用生成函数的角度来理解一下这个推导。

定义无穷数列 h_i 表示 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = i$ 的非负整数解个数。则其生成函数为：

$$g(x) = h_0 + h_1x + \cdots + h_kx^k + \cdots = \binom{n-1}{n-1} + \binom{n-1+1}{n-1}x + \cdots + \binom{k+n-1}{n-1}x^k + \cdots = \frac{1}{(1-x)^k}$$

我们再来审视一下这个生成函数：

$$g(x) = \frac{1}{1-x} \times \cdots \times \frac{1}{1-x} = (1+x+x^2+\cdots) \times (1+x+x^2+\cdots) \times \cdots \times (1+x+x^2+\cdots)$$

从而我们可以发现， $g(x)$ 中 x^k 的系数恰好是 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k$ 的非负整数解个数！

► Catalan 数

问题 25.

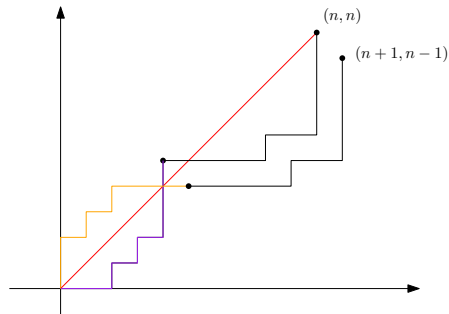
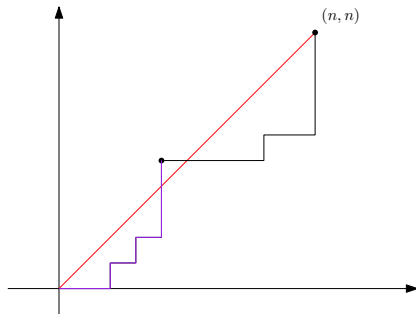
让我们考察这样两个问题：

- 假设一个人从平面直角坐标系的原点开始行走，每次只能向右走一格或者向上走一格，则从 $(0, 0)$ 走到 (n, n) 一共有多少种不同的走法？
 - 假设一个人从平面直角坐标系的原点开始行走，每次只能向右走一格或者向上走一格，并且要求这个人不能走过 $y = x$ 这条线，即当前坐标的横坐标不能小于当前的纵坐标，则从 $(0, 0)$ 走到 (n, n) 一共有多少种不同的走法？
-
- 第一个问题不难回答，一共 $\binom{2n}{n}$ 种走法。
 - 第二个问题需要仔细思考一下。

非负路径个数-第一个解决思路 (I)

我们来考虑那些不满足要求的走法，其一定有第一次超过 $y = x$ 的时刻，记这个点为 $(k, k + 1)$

- 将到 $(k, k + 1)$ 的路径翻转 (左图紫色部分)，变成了右图的路径 (右图的黄色部分)
- 后面的路径不变。



通过上述变换，一条跨越 $y = x$ 的 $(0, 0)$ 到 (n, n) 的路径转换为了一条 $(0, 0)$ 到 $(n-1, n+1)$ 的路径。

- 反过来，任何一条 $(0, 0)$ 到 $(n-1, n+1)$ 的路径都可以通过这个方式转换成一条跨越 $y = x$ 的 $(0, 0)$ 到 (n, n) 的路径。
- 从而这两个集合形成一个双射。

所以，不跨越 $y = x$ 的路径个数 C_n 为：

$$C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

我们对路径进行分段，定义 C_i 是 $(0,0)$ 到 (i,i) 的满足要求的路径数。特别的，我们令 $C_0 = 1$ 。这是合理的。

- 显然 C_i 也是任意的从 (k,k) 到 $(k+i, k+i)$ 的满足要求的路径数。
- 考察一个满足要求的路径，考虑这条路径第一次非起点外和 $y = x$ 存在的交点 (k,k) (可能是终点)：
 - 这条路径可以被拆分成如下两部分： $l_1 : (0,0) \rightarrow (k,k)$ ， $l_2 : (k,k) \rightarrow (n,n)$
 - 我们宣称：
 1. l_2 有 C_{n-k} 条不同的路径数。
 2. l_1 有 C_k 条不同的路径数。因为 l_1 的第一步一定是向右 $+1$ ，而最后一步则一定是向上 $+1$ 。

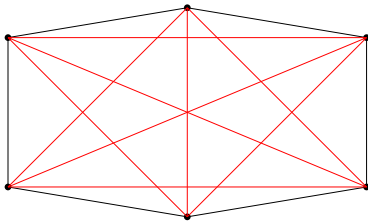
从而 C_n 满足：

$$C_n = \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-1-i} = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

现在我们来考虑如下的问题：在一个凸 n 边形中，存在很多条对角线。

- 一共有多少条对角线？

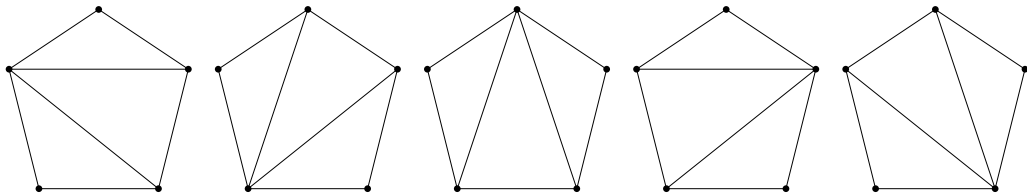
一共有 $\frac{1}{2} \cdot n \cdot (n - 3) = \frac{n(n-3)}{2}$ 条对角线。



我们考虑利用这些对角线将凸 n 边形划分成若干个不相交的三角形：

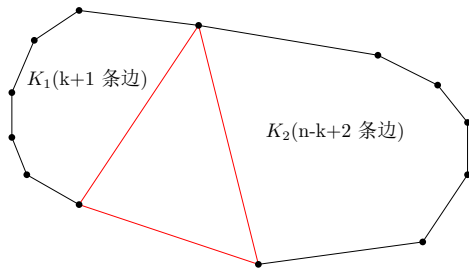
- 使用的对角线满足除了在顶点上其余地方并不相交。

下图都是凸 5 边形的情况，我们将一种方案称为一个三角剖分。问题是对于凸 n 边形，一共有多少种不同的三角剖分方案？



现在我们来求解这个问题。我们令 C_n 表示凸 $n+2$ 边形的三角剖分个数。特别的，我们令 $C_0 = 1$ 。现在考察凸 n 边形中的一条边，在任意一个三角剖分中，其将成为某个三角形的一条边；并且该三角形将凸 n 边形划分成两部分：

- 一部分是凸 $k+1$ 边形。
- 另一部分则是一个凸 $n-k+2$ 边形。



从而由乘法原理，我们可以得到 C_n 满足：

$$C_n = \sum_{k=1}^n C_{k-1} C_{n-k} = \sum_{k=0}^n C_k C_{n-1-k} = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

最后我们用生成函数的方法来推导一下上述递推式：令 $C_0, C_1, \dots, C_n, \dots$ 对应的生成函数为 $H(x)$ ，注意到：

$$(H(x))^2 = C_0^2 + (C_0C_1 + C_1C_0)x + \dots + \sum_{k=0}^n C_k C_{n-k} x^k + \dots$$

即我们有：

$$x(H(x))^2 = C_1x + C_2x^2 + \dots + C_nx^n + \dots = H(x) - 1$$

从而我们可解得：

$$H(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x}$$

注意到 $H(0) = 1$ ，从而 $H(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$ ($\frac{1+\sqrt{1-4x}}{2x}$ 在 0 处的极限是 -1)

由牛顿二项式定理可得:

$$\sqrt{1-4x} = (1-4x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k \times 2^{2k-1}} \binom{2k-2}{k-1} (-4x)^k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-2}{k} \binom{2k-2}{k-1} x^k$$

从而我们有:

$$H(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \binom{2k-2}{k-1} x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k} x^k$$

即 $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$, 我们将这个数列称为 Catalan 数。

Catlan 数具有许多性质，除了上面的性质以外我们还有：

- $C_n = \frac{4n-2}{n+1} C_{n-1}$
- $C_n = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2$

无所不在的 Catlan 数！

Catlan 数也出现在很多计数问题当中：

- 进出栈顺序。
- 括号匹配个数。
- 圆内不相交弦的个数
- 满二叉树的个数。



本章总结

- 组合问题举例
 - 基本计数方法
- 组合数
 - 组合数的实际意义
 - 组合恒等式证明方法
 - 组合数的估计
- 生成函数
 - 牛顿二项式定理、生成函数概念。
 - Catalan 数介绍。