《离散数学》

13-复习 (Review)

杨启哲

上海师范大学信机学院计算机系

2025 年 6 月 5 日

主要内容

- 课程总结
- 考试内容

课程总结

《离散数学》究竟上了什么课?

离散数学是研究离散对象的数学学科，是计算机学科的基础数学学科。

所学的内容

1. 数理逻辑。
2. 集合论。
3. 图论。
4. 组合计数。

数理逻辑是研究推理的内容。

- 命题逻辑
- 一阶逻辑

我们的关注内容:

- 用逻辑公式形式化命题。
- 逻辑公式的演算。
- 逻辑公式的推理。

命题逻辑

- 命题逻辑的基本概念。
  - 命题与联结词的概念。
  - 命题逻辑研究的对象：命题公式。
  - 命题公式的真值。
- 命题逻辑的等值演算
  - 命题公式的等值演算。
  - 命题公式的范式：析取范式和合取范式，主合取范式与主析取范式。
  - 联结词的完备集。
  - 命题公式的可满足性—SAT 问题。
- 命题逻辑的推理
  - 自然推理系统 P。

- 一阶逻辑的基本概念。
  - 命题逻辑的局限性，量词的引入。
  - 一阶逻辑的研究对象：一阶逻辑公式。
  - 一阶逻辑公式的解释及其真值。
- 一阶逻辑的等值演算
  - 一阶逻辑公式的等值演算。
  - 一阶公式的范式-前束范式。
- 一阶逻辑公式的推理
  - 自然推理系统 $P_{\mathcal{L}}$，量词的推理规则。

集合论是研究集合的内容，也是数学的基本语言。

- 集合。
    - 集合的基本概念。（朴素集合论）
    - 集合的运算，有穷集的计数，容斥原理。
    - 朴素集合论的缺陷。
- 关系。
    - 关系的基本概念，有序二元组组成的集合。
    - 关系的性质及运算，关系的闭包。
    - 两种特殊的关系：等价关系与偏序关系。
- 函数。
    - 函数的基本概念，特殊的关系，单射/满射/双射。
    - 函数的性质及运算，复合和逆运算。
    - 集合的基数，比较无穷集合的大小。

图论

图论是一个重要的离散对象，对研究事物及其之间的关系起到了重要的作用。

- 图的基本概念。
  - 无向图与有向图。
  - 图上的基本信息，如顶点的度数，度数列；图的运算，子图，增删操作；图的同构。
  - 图的代数表示：邻接矩阵、关系矩阵和邻接表
- 图的连通性
  - 两个点之间的路径，简单通路（回路）、初级通路（回路）。
  - 图的连通性，无向图连通性的衡量，有向图不同的连通概念（强连通、弱连通、单向连通）
  - 特殊的路，欧拉通路（回路）与哈密顿通路（回路）
- 特殊的图-树
  - 树的不同等价定义，最小连通性的图，最大连通无回路的图。
  - Cayley 公式
  - 生成树的计算，Prim 算法与 Kruskal 算法。
  - 最优二叉树的计算，即 Huffman 树。

组合计数基础

计数问题也是计算机科学中重要问题，其可以回答枚举的可能性。

- 计数的基本方法
  - 计数的基本原理，加法原理等。
- 组合数
  - 组合数的实际意义。
  - 组合恒等式，证明方法，二项式定理。
- 生成函数
  - 组合数的推广、生成函数的基本概念。
  - 利用生成函数计数。

考试内容

考试概况

考试安排

- 考试地点：**奉贤 2 教楼 221**
- 考试时间：**2025 年 6 月 17 日 (周二) 8:30-10:00**，共 90 分钟。

关于考试

1. 不允许使用**计算器**。
2. 请每位学生务必带好**学生证**。

试卷构成

$$\text{试卷} = 20\ \text{分填空题} + 20\ \text{分选择题} + 30\ \text{分综合题} + 30\ \text{分证明题}$$

- 填空题一共 10 空，每空 2 分，共 20 分。
- 选择题一共 10 道，每道 2 分，共 20 分。
- 综合题一共 4 道，每道 15 分，共 60 分。

问题 1.

1. 谓词公式 $(\forall x)(P(x) \to Q(y)) \vee Q(x, y)$ 中量词 $\forall x$ 的辖域为 ______.
2. 已知命题公式 $A(x, y, z)$ 的主析取范式为 $m_1 \vee m_4 \vee m_6$，则该公式的主合取范式为 ______.
3. 令 F 是 $A = \{1, 2, 3\}$ 上的二元关系，$F = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (1, 3)\}$，则 F 的对称闭包是 ______。
4. n 阶完全图的边数为 ______。
5. 方程 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$ 的正整数解个数为 ______。
6. 序列 $1, -1, 1, -1, \cdots$ 的生成函数为 ______。

解： 1. $P(x) \to Q(y)$ 2. $M_0 \wedge M_2 \wedge M_3 \wedge M_5 \wedge M_7$ 3. $s(F) = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (1, 3), (3, 1)\}$ 4. $n(n-1)/2$ 5. $\binom{20}{3}$. 6. $\frac{1}{1+x}$. $\square$

问题 2.

1. 令 $F(x)$ 表示 x 是有理数，$G(x)$ 表示 x 是实数，则命题”所有的有理数都是实数，但有的实数不是有理数”的符号化为（ ）
   (A) $\forall x(F(x) \wedge G(x)) \wedge \exists x(G(x) \rightarrow \neg F(x))$ (B) $\forall x(F(x) \wedge G(x)) \wedge \exists x(G(x) \wedge \neg F(x))$
   (C) $\forall x(F(x) \rightarrow G(x)) \wedge \exists x(G(x) \wedge \neg F(x))$ (D) $\forall x(F(x) \rightarrow G(x)) \wedge \exists x(G(x) \rightarrow \neg F(x))$
2. 下列序列中，可构成无向简单图的结点度序列的是（ ）
   (A) $(1,2,3,4)$ (B) $(2,3,1,2)$ (C) $(1,2,2,2)$ (D) $(1,1,3,3)$
3. 下列说法错误的是（ ）
   (A) n 个结点的树有 $n-1$ 条边 (B) n 个结点的连通图至少有 $n-1$ 条边
   (C) 奇数个顶点的二分图没有哈密顿回路。 (D) 无向连通带权重图的最小生成树唯一
4. 下列集合中跟有理数集合等势的是（ ）
   (A) 平面直角坐标系上所有点的集合 (B) 整数集合 (C) $[0,1]$ (D) 实数集合

解： 1. C 2. B 3. D 4. B □

问题 3.

1. 用等值演算的方式证明：$(p \vee q) \rightarrow r \Leftrightarrow (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$
2. 用任何一种方式给出下列推理的证明：
   $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)), \forall x(Q(x) \rightarrow R(x)) \vdash \forall x(P(x) \rightarrow R(x))$;

解：

1. 由基本等值式可得：

$$
\begin{aligned}
(p \vee q) \rightarrow r &\Leftrightarrow \neg(p \vee q) \vee r && \text{(蕴含等值式)} \\
&\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \vee r && \text{(德摩根律)} \\
&\Leftrightarrow (\neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee r) && \text{(分配律)} \\
&\Leftrightarrow (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) && \text{(蕴含等值式)}
\end{aligned}
$$

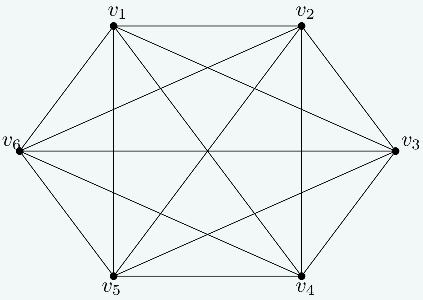
2. 证明如下：

   2.1 $\forall x(P(x) \to Q(x))$ 　前提引入
   2.2 $P(x) \to Q(x)$ 　$\forall_-$
   2.3 $\forall x(Q(x) \to R(x))$ 　前提引入
   2.4 $Q(x) \to R(x)$ 　$\forall_-$
   2.5 $P(x) \to R(x)$ 　$p \to q,\ q \to r \Rightarrow p \to r$
   2.6 $\forall x(P(x) \to R(x))$ 　$\forall_+$

$\square$

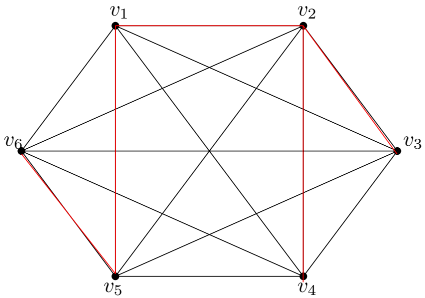
问题 4.

现有 $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$ 共六村子需要修路，村子间修路的成本见下图，单位是万元现要求 v_1 和 v_2 间必修一条直达路，v_5 和 v_6 间也需要修一条直达路。请找一个满足上面要求，而且保证六个村子间连通的成本最小的修路方案，并计算出最小的修路成本。



$cost(v_1, v_2) = 14$	$cost(v_2, v_3) = 10$	$cost(v_3, v_5) = 12$
$cost(v_1, v_3) = 13$	$cost(v_2, v_4) = 9$	$cost(v_3, v_6) = 18$
$cost(v_1, v_4) = 15$	$cost(v_2, v_5) = 14$	$cost(v_4, v_5) = 10$
$cost(v_1, v_5) = 10$	$cost(v_2, v_6) = 19$	$cost(v_4, v_6) = 15$
$cost(v_1, v_6) = 12$	$cost(v_3, v_4) = 80$	$cost(v_5, v_6) = 80$

解： 其实就是要求包含 $(v_1, v_2), (v_5, v_6)$ 的最小生成树。



$cost(v_1, v_2) = 14$	$cost(v_2, v_3) = 10$	$cost(v_3, v_5) = 12$
$cost(v_1, v_3) = 13$	$cost(v_2, v_4) = 9$	$cost(v_3, v_6) = 18$
$cost(v_1, v_4) = 15$	$cost(v_2, v_5) = 14$	$cost(v_4, v_5) = 10$
$cost(v_1, v_5) = 10$	$cost(v_2, v_6) = 19$	$cost(v_4, v_6) = 15$
$cost(v_1, v_6) = 12$	$cost(v_3, v_4) = 80$	$cost(v_5, v_6) = 80$

最小成本为：$9 + 10 + 10 + 14 + 80 = 123.$ $\square$

问题 5.

求解关于初值 $a_0 = 0, a_1 = 1$ 的如下递推公式的通项公式:

1. $a_n - 5a_{n-1} + 6a_{n-2} = 0.$
2. $a_n - 5a_{n-1} + 6a_{n-2} = n.$

分析

1. 这类问题可以用特征方程法来求解，即通过对应特征方程的根来求解通项公式。
2. 在求解第二种非齐次形式中，需要注意到该公式的解一定是“特解 + 通解”的形式，即通解是对应齐次方程的解，而特解则是一个满足上述递推公式的特殊解，而该解可以根据非齐次部分的形式来进行猜测。

解:

1. 特征方程为 $x^2 - 5x + 6 = 0$，其根为 $x_1 = 2, x_2 = 3$，因此可以设其通项公式为:

$$a_n = A \cdot 2^n + B \cdot 3^n$$

代入 $a_0 = 0, a_1 = 1$ 计算可得: $a_n = 3^n - 2^n$.

2. 注意到 n，并且 1 不是其特征方程的解，从而猜测其特解形式为 $An + B$，代入递推公式可得:

$$An + B - 5(A(n-1) + B) + 6(A(n-2) + B) = n \;\Rightarrow\; (2A-1)n + (2B - 7A) = 0$$

解得 $A = \frac{1}{2}, B = \frac{7}{4}$，因此其解为:

$$a_n = C \cdot 2^n + D \cdot 3^n + \frac{1}{2}n + \frac{7}{4}$$

代入 $a_0 = 0, a_1 = 1$ 计算可得: $a_n = \frac{9}{4} \cdot 3^n - 4 \cdot 2^n + \frac{1}{2}n + \frac{7}{2}$.

关于递推方程更多的一些阐述:

1. 如果计算出来是重根，比如 $(x-2)^k=0$，则该部分的通项公式为:

$$(C_1+C_2\cdot n+\cdots+C_k\cdot n^{k-1})\cdot 2^n$$

2. 一般对于特解部分，多项式猜同次多项式，指数猜指数，但是如果碰到 1 是特征根的情况下，多项式要猜高一次。

一个完课的调查

上海师范大学 Shanghai Normal University

最后，这是关于这门课完课的一个调查问卷，希望同学们可以积极参与，表达大家的想法和建议，你们的意见能够帮助我更好的改进这门课程。谢谢！

- 《离散数学》完课调查:https://www.wjx.cn/vm/PpMIDGV.aspx
- 问卷的二维码：

祝大家考试顺利！谢谢聆听！