上海师范大学 Shanghai Normal University

《离散数学》

7-关系 (Relation)

杨启哲

上海师范大学信机学院计算机系

2025 年 3 月 31 日

主要内容

- 关系的基本概念
- 关系的性质、闭包
- 等价关系及其划分
- 偏序关系

关系的基本概念

在集合的理论中，我们有：

- $\{1,2\}=\{2,1\}$.

如果我们需要区分元素的顺序，比如说 (x,y) 满足 x 是第一个元素，y 是第二个元素，显然在这种意义下我们希望：

$$(x,y)\neq(y,x)$$

为此，我们引入有序对的概念。

定义 1 **[有序对].**

由 2 个元素 x 和 y 按照一定顺序排列成的二元组称作一个有序对，记作 (x,y).

有序对的基本性质

显然，有序对 (x, y) 具有以下性质：

- $(x, y) = (u, v)$ 当且仅当 $x = u$ 且 $y = v$.
- $x \neq y$ 时我们有 $(x, y) \neq (y, x)$.

用集合来定义有序对

事实上，我们也可以用集合的语言来定义有序对：

$$(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \{x, \{x, y\}\}$$

不难验证，这样定义的有序对满足上述性质。

上述概念也可以自然的推广到有序的 n 元组。

有了有序对的概念，我们就可以定义集合的笛卡尔积了。

定义 2.

设 A 和 B 是两个集合，由所有有序对 (a, b) 组成的集合称为 A 与 B 的笛卡尔积，记作 $A \times B$，即

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

笛卡尔积举例

考虑集合 $A = \{a, b\}$，$B = \{1, 2, 3\}$，则我们有：

- $A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}$、
- $B \times A = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$.

定义 3 **[n 元有序组].**

令 $x_1, \ldots, x_n$ 是 n 个元素，则 $n \geqslant 2$ 时 n 元组 $(x_1, \ldots, x_n)$ 定义为:

$$(x_1, \ldots, x_n) = ((x_1, \ldots, x_{n-1}), x_n)$$

定义 4 **[n 阶笛卡尔积].**

令 $A_1, \ldots, A_n$ 是 n 个集合，其 n 阶笛卡尔积记作 $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$，定义为:

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_1 \in A_1 \wedge \cdots \wedge x_n \in A_n\}$$

笛卡尔积的性质 (I)

1. 对任意集合 A，有 $A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset$.
2. 笛卡尔积不满足交换律，即当集合 A, B 都不为空且不相等时有
$$A \times B \neq B \times A.$$
3. 笛卡尔积不满足结合律，对任意不为空的集合 A, B, C，有
$$(A \times B) \times C \neq A \times (B \times C).$$
4. 笛卡尔积对交和并运算满足分配律，即：
$$\begin{aligned} A \times (B * C) &= (A \times B) * (A \times C) \\ (A * B) \times C &= (A \times C) * (B \times C) \end{aligned}$$
这里 $* \in \{\cup, \cap\}$.

我们给出第 4 点第一个等式的一个证明，以 $\cup$ 为例。

证明：[$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$ 的证明]

$$
\begin{aligned}
& (x, y) \in A \times (B \cup C) \\
\Leftrightarrow\ & x \in A \wedge y \in (B \cup C) \\
\Leftrightarrow\ & x \in A \wedge (y \in B \vee y \in C) \\
\Leftrightarrow\ & (x \in A \wedge y \in B) \vee (x \in A \wedge y \in C) \\
\Leftrightarrow\ & (x, y) \in (A \times B) \vee (x, y) \in (A \times C) \\
\Leftrightarrow\ & (x, y) \in (A \times B) \cup (A \times C)
\end{aligned}
$$

笛卡尔积的性质 (II)

5. 对任意集合 A, B, C, D，有

$$(A \subseteq C) \wedge (B \subseteq D) \Rightarrow (A \times B \subseteq C \times D)$$

   上述性质的逆命题不成立。

6. 令 A, B 是有限集，则:

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|$$

我们下面定义一个常用的概念-关系。

什么是关系

通俗的讲，关系就是元素之间的联系。二元关系，则就是反映两个元素之间联系的关系。

- 在命题逻辑中，我们可以定义两个命题公式 A 和 B 等值，即 A 和 B 的等价关系。
- 在大家读书的过程中，我们可以定义学生和课程之间的选课关系。
- 在自然数中，我们可以定义两个数的小于关系。

定义 5 [二元关系].

给定两个集合 A 和 B，集合 $A \times B$ 的任一个子集 R 确定了一个 A 到 B 上的二元关系:

- 若 $(x, y) \in R$，可记作 xRy.
- 若 $(x, y) \notin R$，可记作 $x\not{R}y$.

特别的，如果 $B = A$，则称关系 R 是在 A 上的关系。

给定一个集合 A，我们可以定义如下的特殊关系：

- 恒等关系：$I_A = \{(x, x) \mid x \in A\}$.
- 全域关系：$E_A = \{(x, y) \mid x, y \in A\}$.
- 空关系：$\emptyset$

例 6.

对于集合 $A = \{a, b\}$ 我们有：

- $I_A = \{(a, a), (b, b)\}$
- $E_A = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\}$

二元关系的其他表示-关系矩阵表示

当定义在有限集合上的关系时，我们可以通过矩阵的形式来表述一个关系。

令 R 是定义在集合 X 上的关系，其中:

- $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$

则我们可以用一个 $N \times n$ 的矩阵 M_R 来表示 R:

$$M_R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nn} \end{bmatrix}$$

其中 $r_{ij} = 1$ 当且仅当 $x_i R x_j$，否则 $r_{ij} = 0$.

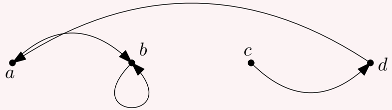
二元关系的其他表示-关系图表示

我们也可以用一张关系图来表示在有限集合 X 上的关系。

- 令集合 X 中的每一个元素为一个节点。
- 对于 $x, y \in X$。如果 xRy，则在图中连一条 x 指向 y 的有向边。

例 7.

如图所示:



上述关系图定义了在 $\{a, b, c, d\}$ 上的一个关系 $R = \{(a, b), (b, b), (c, d), (d, a)\}$.

给定一个 A 到 B 的关系 R 和一个 A 的子集 A':

- R 的定义域$\mathrm{dom}(R) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{x \mid \exists y (x,y) \in R\}$.
- R 的值域$\mathrm{ran}(R) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{y \mid \exists x (x,y) \in R\}$.
- R 的域$\mathrm{fld}(R) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{dom}(R) \cup \mathrm{ran}(R)$.
- R 在 A' 上的限制$R \upharpoonright A' \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{(x,y) \mid xRy \wedge x \in A'\}$，其值域记作 $R[A']$，即 $R[A'] = \mathrm{ran}(R \upharpoonright A')$.

例 8.

给定集合 $A = B = \mathbb{N}, A' = \{1,2\}, R = \{(1,2),(1,3),(2,2),(3,2),(4,5)\}$，则我们有:

- $\mathrm{dom}(R) = \{1,2,3,4\}$，$\mathrm{ran}(R) = \{2,3,5\}$.
- $R \upharpoonright A' = \{(1,2),(1,3),(2,2)\}$，$R[A'] = \{2,3\}$.
- $R \upharpoonright \emptyset = \emptyset$，$R[\emptyset] = \emptyset$.

我们下面介绍两种关系上的运算：逆运算$^{-1}$ 和复合运算$\circ$.

定义 9 **[逆运算].**

给定一个关系 $R \subseteq A \times B$，则 R 的逆运算 R^{-1} 定义为：

$$R^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in R\}$$

定义 10 **[复合运算].**

给定两个关系 $R \subseteq A \times B$ 和 $S \subseteq B \times C$，则 R 和 S 的复合 $R \circ S$ 定义为：

$$R \circ S = \{(x, z) \mid \exists y(xRy \wedge ySz)\}$$

对 $\circ$ 的额外说明

这里定义的复合与函数的复合有些许区别，这种定义叫做右复合。符合函数复合习惯的复合定义被叫做左复合。但本质上两种复合的定义是一样的。

定理 11.

令 R, P, Q 是分别定义在集合 A 到 B、集合 B 到 C、集合 C 到 D 上的关系，则我们有:

- $(R^{-1})^{-1} = R$.
- $\mathrm{dom}(R) = \mathrm{ran}(R^{-1})$, $\mathrm{ran}(R) = \mathrm{dom}(R^{-1})$.
- $(R \circ P) \circ Q = R \circ (P \circ Q)$.
- $(R \circ P)^{-1} = P^{-1} \circ R^{-1}$.

额外说明

后续在不牵扯到关系具体的定义域和值域时，我们不会对定义域和值域多加说明。

我们对第三个进行一下证明。

证明： $[(R \circ P) \circ Q = R \circ (P \circ Q)$ 的证明$]$ 任取 $(x, y) \in A \times D$。我们有：

$$
\begin{aligned}
& (x, y) \in (R \circ P) \circ Q \\
\Leftrightarrow\ & \exists z\ ((x, z) \in R \circ P \wedge (z, y) \in Q) \\
\Leftrightarrow\ & \exists z((\exists w(x, w) \in R \wedge (w, z) \in P) \wedge (z, y) \in Q) \\
\Leftrightarrow\ & \exists z \exists w(((x, w) \in R \wedge (w, z) \in P) \wedge (z, y) \in Q) \\
\Leftrightarrow\ & \exists w(((x, w) \in R) \wedge (\exists z((w, z) \in P \wedge (z, y) \in Q))) \\
\Leftrightarrow\ & \exists w((x, w) \in R \wedge (w, y) \in P \circ Q) \\
\Leftrightarrow\ & (x, y) \in R \circ (P \circ Q).
\end{aligned}
$$

关系运算的基本性质 (II)

上海师范大学 Shanghai Normal University

定理 12.

令 R, P, Q 是任一关系，A, B 是两个集合，则我们有:

- $R \circ (P \cup Q) = (R \circ P) \cup (R \circ Q)$.
- $(P \cup Q) \circ P = (P \circ R) \cup (Q \circ R)$.
- $R \circ (P \cap Q) \subseteq (R \circ P) \cap (R \circ Q)$.
- $(P \cap Q) \circ R \subseteq (P \circ R) \cap (Q \circ R)$.
- $R \restriction (A \cup B) = R \restriction A \cup R \restriction B$.
- $R \restriction (A \cap B) \subseteq R \restriction A \cap R \restriction B$.

如果一个关系是定义在某个集合 A 上的，则我们可以**不停的复合**这个关系，得到一个新的关系。这个过程可以用幂运算来表示。

定义 13 **[幂运算].**

给定一个集合 A 上的关系 R，则 R 的 n 次幂定义为：

- $R^0 = I_A$.
- $R^{n+1} = R^n \circ R$.

例 14.

给定集合 $A = \{1,2,3,4\}$，关系 $R = \{(1,2),(2,1),(2,3),(3,4)\}$，则我们有：

- $R^0 = I_A = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$，$R_1 = R$.
- $R^2 = R^4 = \{(1,1),(2,2),(1,3),(2,4)\}$.
- $R^3 = R^5 = \{(1,2),(2,1),(2,3),(1,4)\}$.

在上述例子中，我们可以发现 $R^2 = R^4 = R^6 = \cdots$ 和 $R^3 = R^5 = R^7 = \cdots$。事实上这不是偶然的。当集合 A 是有限集时，我们可以证明：

定理 15.

令 A 是一个有限集，R 是 A 上的一个关系，则存在不同的正整数 s, t 使得 $R^s = R^t$.

证明： 注意到 A 是有限集，因此集合 $\mathscr{P}(A \times A)$ 也是有限集，记 $|\mathscr{P}(A \times A)| = n$，则考虑关系 $R^0, \ldots R^n$，必然存在两个 $s < t \in \{0, 1, \ldots, n\}$ 满足：$R^s = R^t$.

- 事实上，我们稍后会进一步的说明任何 R^k 都是 $R^0, \ldots, R^{t-1}$ 中的一个。
- 但$R^{t-s} \neq I_A$!
- 对于 A 不是有限集的情况，如果存在 s, t 使得 $R^s = R^t$，则说明 R 的幂集关系呈周期性。

上海师范大学 Shanghai Normal University

定理 16.

令 A 是一个集合，R 是 A 上的一个关系，则对任意的正整数 m, n，我们有：

- $R^{m+n} = R^m \circ R^n$.
- $(R^m)^n = R^{mn}$.

这一定理说明，我们可以任意改变幂运算的复合顺序。

证明： 我们对第一个式子进行证明。对任意的 m 我们对 n 做归纳。

- $n = 0$ 时，由定义有 $R^{m+0} = R^m \circ R^0 = R^m \circ I_A = R^m$.
- 假设 $n = k$ 时命题成立，则 $n = k + 1$ 时，我们有：

$$R^m \circ R^{k+1} = R^m \circ (R^k \circ R) = (R^m \circ R^k) \circ R = R^{m+k} \circ R = R^{m+k+1}$$

定理 17.

令 A 是一个集合，R 是 A 上的一个关系，若存在整数 s，t 满足：$R^s = R^t$，则我们有：

- 对任意的 $k \in \mathbb{N}$，我们有：$R^{s+k} = R^{t+k}$.
- 对任意的 $k \in \mathbb{N}$，我们有：$R^{s+k(t-s)+i} = R^{s+i}$.
- 令 $S = \{R^0, R^1, \ldots, R^{t-1}\}$，则对任意的 $k \in \mathbb{N}$，我们有：$R^k \in S$.

这一定理说明了对于有限集上的关系，其幂运算最终会进入一个循环。

幂运算的性质 (III)

证明:

1. $R^{s+k} = R^s \circ R^k = R^t \circ R^k = R^{t+k}$.
2. $R^{s+k(t-s)+i} = R^{s+k(t-s)} \circ R^i = R^{s+(k-1)(t-s)} \circ R^i = \cdot = R^s \circ R^i = R^{s+i}$.
3. 考虑 $k \in \mathbb{N}$，若 $k \leqslant t$，则由 S 的定义 $R^k \in S$，否则存在 $q, r \in \mathbb{N}$ 使得

$$k = s + q(t-s) + r,\ 0 \leqslant r \leqslant t - s - 1$$

从而:

$$R^k = R^{s+q(t-s)+r} = R^{s+r} \in S$$

阶段总结

- 有序对的概念，笛卡尔积。
- 二元关系的定义，关系的运算 (右复合，逆运算，幂运算)。
- 关系运算的基本性质。

关系的性质、闭包

对于集合 A 上的关系 R，我们称:

1. R 是自反的 (reflexive)，如果对任意的 $x \in A$，我们有 xRx.
2. R 是反自反的 (irreflexive)，如果对任意的 $x \in A$，我们有 $x \not R x$.
3. R 是对称的 (symmetric)，如果对任意的 $x, y \in A$，我们有 $xRy \Rightarrow yRx$.
4. R 是反对称的 (anti-symmetric)，如果对任意的 $x, y \in A$，我们有 $xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y$.
5. R 是传递的 (transitive)，如果对任意的 $x, y, z \in A$，我们有 $xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$.

例 18.

令集合 $A = \{1, 2, 3\}$，R_1，R_2，R_3 是 A 上的关系，分别为：

- $R_1 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$.
- $R_2 = \{(1, 2), (2, 1), (1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$.
- $R_3 = \{(1, 2), (2, 1), (1, 1)\}$.

则：

- R_1 是自反的，对称的，反对称的，传递的，不是反自反的。
- R_2 是自反的、对称的，传递的，不是反自反的、反对称的。
- R_3 是对称的，不是自反的、反自反的、反对称的、传递的。

例 19.

考察定义在自然数 $\mathbb{N}$ 的如下关系 R:

$$R = \{(x.y)|x \equiv y(\bmod 6)\}$$

则我们有:

- R 是自反的，因为显然 $x \equiv x(\bmod 6)$.
- R 不是反自反的，因为 $(1,1) \in R$。
- R 是对称的，因为显然如果 $x \equiv y(\bmod 6)$，则有 $y \equiv x(\bmod 6)$.
- R 不是反对称的，因为比如 $(1,7),(7,1) \in R$，但是 $1 \neq 7$.
- R 是传递的，因为如果 $x \equiv y(\bmod 6)$ 且 $y \equiv z(\bmod 6)$，则 $x \equiv z(\bmod 6)$.

稍后会介绍，满足这样性质的一个关系被称作等价关系。

例 20.

考察定义在自然数 $\mathbb{N}$ 的如下关系 R:

$$R = \{(x.y) | x \leqslant y\}$$

则我们有:

- R 是自反的，因为显然 $x \leqslant x$.
- R 不是反自反的，因为 $1 \leqslant 1$。
- R 不是对称的，因为 $3 \leqslant 4$ 但 $4 \not\leqslant 3$.
- R 是反对称的，因为如果 $x \leqslant y \wedge y \leqslant x$，则我们有 $x = y$.
- R 是传递的，因为如果 $x \leqslant y$ 且 $y \leqslant z$，则 $x \leqslant z$.

稍后会介绍，满足这样性质的一个关系被称作偏序关系。事实上这还是一个全序。

下述定理给出了上述 5 种关系成立的条件。

定理 21.

令 R 为 A 上的关系，则:

- R 是自反的当且仅当 $I_A \subseteq R$.
- R 是反自反的当且仅当 $I_A \cap R = \emptyset$.
- R 是对称的当且仅当 $R = R^{-1}$.
- R 是反对称的当且仅当 $R \cap R^{-1} \subseteq I_A$.
- R 是传递的当且仅当 $R \circ R \subseteq R$.

定理21的证明

我们对第一个式子给出相应的证明。**证明：**[自反性的充要条件]

- 必要性。任取 $(x, y) \in I_A$，我们有：

$$(x, y) \in I_A \Rightarrow x = y \wedge x, y \in A \Rightarrow (x, y) \in R$$

  从而我们有:$I_A \subseteq R$

- 充分性。任取 x，有：

$$x \in A \Rightarrow (x, x) \in I_A \subseteq R \Rightarrow xRx$$

  从而 R 是自反的。

我们现在来考察在运算 $\cap$, $\cup$, $-$, $^{-1}$, $\circ$ 下这些关系的性质是否能够保持。

定理 22.

令 R_1, R_2 是集合 A 上的两个自反关系，则 $R_1 \cap R_2$, $R_1 \cup R_2, R_1^{-1}, R_1 \circ R_2$ 也是自反的。

证明：我们对 $R_1 \cap R_2$ 给出相应的证明，其余是类似的。

任取 $x \in A$，我们有:

$$x \in A \Rightarrow (x, x) \in R_1 \wedge (x, x) \in R_2 \Rightarrow (x, x) \in R_1 \cap R_2$$

从而 $R_1 \cap R_2$ 是自反的。

$R_1 - R_2$ 不是自反的，事实上其是反自反的。

定理 23.

令 R_1，R_2 是集合 A 上的两个反自反关系，则 $R_1 \cap R_2$，$R_1 \cup R_2$，R_1^{-1}，$R_1 - R_2$ 也是反自反的。

证明： 我们对 $R_1 - R_2$ 给出相应的证明，其余是类似的。

任取 $x \in A$，我们有:

$$x \in A \Rightarrow (x, x) \notin R_1 \Rightarrow (x, x) \notin R_1 - R_2$$

从而 $R_1 - R_2$ 是反自反的。

$R_1 \circ R_2$ 不是反自反的，如令：$R_1 = \{(1, 2)\}$，$R_2 = \{(2, 1)\}$.

定理 24.

令 R_1，R_2 是集合 A 上的两个对称关系，则 $R_1 \cap R_2$，$R_1 \cup R_2$，R_1^{-1}，$R_1 - R_2$ 也是对称的。

证明： 我们对 $R_1 \cup R_2$ 给出相应的证明，其余两个是类似的。

任取 $(x, y) \in R_1 \cup R_2$，我们有:

- $(x, y) \in R_1 \Rightarrow (y, x) \in R_1 \Rightarrow (y, x) \in R_1 \cup R_2$
- $(x, y) \in R_2 \Rightarrow (y, x) \in R_2 \Rightarrow (y, x) \in R_1 \cup R_2$

从而 $R_1 \cup R_2$ 是对称的。

$R_1 \circ R_2$ 不是对称的，如令：$R_1 = \{(1, 1)\}$，$R_2 = \{(1, 2), (2, 1)\}$.

定理 25.

令 R_1，R_2 是集合 A 上的两个反对称关系，则 $R_1 \cap R_2$，$R_1 - R_2, R_1^{-1}$ 也是反对称的。

证明： 我们对 $R_1 \cap R_2$ 给出相应的证明，其余两个是类似的。

任取 $(x, y) \in R_1 \cap R_2$, 若 $(y, x) \in R_1 \cap R_2$，则:

$$(x, y), (y, x) \in R_1 \cap R_2 \Rightarrow (x, y) \in R_1 \land (y, x) \in R_1 \Rightarrow x = y$$

从而 $R_1 \cap R_2$ 是反对称的。

$R_1 \cup R_2$ 不是反对称的，如令：$R_1 = \{(1, 2)\}$，$R_2 = \{(2, 1)\}$.

Shanghai Normal University

定理 26.

令 R_1，R_2 是集合 A 上的两个传递关系，则 $R_1 \cap R_2$，R_1^{-1} 也是传递的。

证明： 我们对 R_1^{-1} 给出相应的证明，其余是类似的。

任取 $(x, y), (y, z) \in R_1^{-1}$，我们有:

$$(x, y), (y, z) \in R^{-1} \Rightarrow (y, x), (z, y) \in R \Rightarrow (z, x) \in R \Rightarrow (x, z) \in R^{-1}$$

从而 R_1^{-1} 是传递的。

$R_1 \cup R_2$ 不是传递的，如令：$R_1 = \{(1, 2)\}$，$R_2 = \{(2, 3)\}$.

关系性质和运算的关系的总结

总结

- $\cap$, ${}^{-1}$ 可以保持关系所有的性质。
- $\cup$ 可能破坏传递性和反对称性，因为其可能引入新的关系。
- $-$ 可能破坏自反性和对称性，因为其可能去除原有的关系。
- $\circ$ 只能保证自反性.

我们可以将上述的内容汇总成如下的一张表：

运算	关系性质				
	自反	反自反	对称	反对称	传递
$\cap$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$
$\cup$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\times$	$\times$
${}^{-1}$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$
$\circ$	$\checkmark$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$
$-$	$\times$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\times$

闭包 (closure)

考察定义在 $\{1,2,3\}$ 上的关系 R:

$$R = \{(1,1),(1,2),(2,3),(3,3)(3,1)\}$$

R 不满足自反性，但是令 $R' = R \cup \{(3,3)\}$:

- R' 是自反的
- 对于任何一个关系 R_0 满足 $R \subseteq R_0$，如果 R_0 是自反的，则一定有 $R' \subseteq R_0$.

我们将这样最小扩充关系 R 使得其满足某个性质而得到的新关系称为R 的闭包。

定义 27 **[R 的自反（对称/传递）闭包].**

令 R 是非空集合 A 上的一个关系，其自反（对称/传递）闭包是 A 上的关系 R' 满足:

- R' 是自反的（对称/传递）。
- $R \subseteq R'$.
- 对任何 A 上的关系 R_0，若 $R \subseteq R_0$ 且 R_0 是自反的（对称/传递），则有 $R' \subseteq R_0$.

闭包举例

对于定义在集合 A 上的关系 R，我们一般用$r(R), s(R), t(R)$来表示其自反、对称、传递闭包。

例 28.

考虑集合 $A = \{1, 2, 3\}$，定义其上的关系 R 为:

$$R = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$$

则我们有:

- R 的自反闭包为：$r(R) = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$.
- R 的对称闭包为：$s(R) = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 1), (3, 1), (3, 2)\}$.
- R 的传递闭包为：$t(R) = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$.
- R 的自反对称闭包为:
  $r(s(R)) = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 1), (3, 1), (3, 2)\}$.
- R 的对称自反闭包为:
  $s(r(R)) = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 1), (3, 1), (3, 2)\}$.

我们先来介绍闭包的一些性质。

定理 29.

令 R_1 和 R_2 是集合 A 上的两个关系，则：

- 若 R_1 是自反的 (对称、传递)，则 $r(R_1) = R_1(s(R_1) = R_1, t(R_1) = R_1)$。
- 若 $R_1 \subseteq R_2$，则 $r(R_1) \subseteq r(R_2), s(R_1) \subseteq s(R_2), t(R_1) \subseteq t(R_2)$.
- $r(R_1) \cup r(R_2) = r(R_1 \cup R_2)$.
- $s(R_1) \cup s(R_2) = s(R_1 \cup R_2)$.
- $t(R_1) \cup t(R_2) \subseteq t(R_1 \cup R_2)$.

上海师范大学 Shanghai Normal University

我们这里依旧只给出最后一个的证明。**证明：** [$t(R_1)\cup t(R_2)\subseteq t(R_1\cup R_2)$ 的证明] 任取 $(x,y)\in t(R_1)\cup t(R_2)$，我们有:

$$(x,y)\in t(R_1)\vee(x,y)\in t(R_2)$$

若 $(x,y)\in t(R_1)$，则:

- $(x,y)\in R_1$，则 $(x,y)\in R_1\cup R_2$，从而 $(x,y)\in t(R_1\cup R_2)$.
- $(x,y)\notin R_1$. 由于 $(x,y)\in t(R_1)$，则存在 $z_1,\ldots z_k\in A$ 满足:
  $(x,z_1),(z_1,z_2),\ldots(z_k,y)\in R_1$，从而 $(x,z_1),(z_1,z_2),\ldots(z_k,y)\in R_1\cup R_2$，即 $(x,y)\in t(R_1\cup R_2)$.

注意!

这一结论反过来并不成立, 即 $t(R_1\cup R_2)\not\subseteq t(R_1)\cup t(R_2)$, 比如令 $R_1=\{(1,2)\}$, $R_2=\{(2,3)\}$, 则有: $t(R_1\cup R_2)=\{(1,2),(2,3),(1,3)\}\not\subseteq t(R_1)\cup t(R_2)$.

上海师范大学 Shanghai Normal University

现在我们来介绍如何针对一个关系 R，构造相应的自反闭包、对称闭包、传递闭包。

定理 30.

令 R 是集合 A 上的一个关系，则：

- $r(R) = R \cup R^0$.
- $s(R) = R \cup R^{-1}$.
- $t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \cdots (\overset{\text{记作}}{=} \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i)$.

Shanghai Normal University

我们下面给出关于传递闭包的证明。

证明：$[t(R) = \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$ 的证明]

- 先证: $t(R) \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$，为此只需要证明 $\bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$ 是传递的。
  任取 $(x, y), (y, z) \in \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$，则由定义存在 i, j 使得 $(x, y) \in R^i$，$(y, z) \in R^j$，从而 $(x, z) \in R^{i+j}$，即 $(x, z) \in \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$. 从而 $\bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$ 是传递的。
- 再证：$\bigcup_{i=1}^{\infty} R^i \subseteq t(R)$，为此只需要证明对任意 $k \in \mathbb{N}^+$ 有 $R^k \subseteq t(R)$，我们对 k 作归纳法。
  $k = 1$ 是显然的，假设命题对 k 成立，即 $R^k \in t(R)$，则 $k + 1$ 时，
  - 对任一 $(x, y) \in R^{k+1}$，存在 $z \in A$ 使得 $(x, z) \in R^k$，$(z, y) \in R$，由归纳假设，$(x, z) \in t(R)$，从而 $(x, y) \in t(R)$.

  即命题对 $k + 1$ 成立，从而对于任意的 k，有 $R^k \subseteq t(R)$，即 $\bigcup_{i=1}^{\infty} R^i \subseteq t(R)$.

构造多个性质的闭包 (I)

定理 30 给出了对自反闭包、对称闭包和传递闭包的构造方法。

如果我们想构造一个同时满足多个性质的闭包，比如对于一个关系 R，我们希望构造其的自反对称闭包。

- $s(r(R))$?
- $r(s(R))$?

事实上，这两个是等同的，下述定理揭示了三种构造的性质，可以看到对称闭包可能会破坏传递性，从而我们在构造需要有传递性和对称性的闭包时，应该先构造对称闭包。

定理 31.

令 R 是集合 A 上的一个关系，则：

- $r(s(R)) = s(r(R))$.
- $r(t(R)) = t(r(R))$.
- $s(t(R)) \subseteq t(s(R))$.

进一步我们用 $rs(R)$ 来表示 $r(s(R))$，其余类似。

证明： 我们对第一个和第二个式子给出相应的证明，第三个则留作练习。

$$\begin{aligned}
rs(R) &= r(R \cup R^{-1}) \\
&= (R \cup R^{-1}) \cup I_A \\
&= (R \cup I_A) \cup (R^{-1} \cup R^0) \\
&= r(R) \cup (R \cup R^0)^{-1} \\
&= r(R) \cup r(R)^{-1}
\end{aligned}$$

证明: [$rt(R) = tr(R)$ 的证明] 我们首先用归纳法证明:

$$(R \cup R^0)^n = R^0 \cup R^1 \cup \cdots \cup R^n \tag{1}$$

若等式 (1) 对 n 成立，则有:

$$\begin{aligned} tr(R) &= t(R \cup R^0) \\ &= (R \cup R^0) \cup (R \cup R^0)^2 \cup \cdots \\ &= (R^0 \cup R^1) \cup (R^0 \cup R^1 \cup R^2) \cup (R^0 \cup R^1 \cup R^2 \cup R^3) \cup \cdots \\ &= R^0 \cup R^1 \cup R^2 \cup \cdots \\ &= (R^1 \cup R^2 \cup \cdots)^0 \cup R^1 \cup R^2 \cup \cdots \\ &= (t(R))^0 \cup t(R) = rt(R) \end{aligned}$$

引理 32.

$(R \cup R^0)^n = R^0 \cup R^1 \cup \cdots \cup R^n$

证明： 对 n 做归纳法。

$n = 1$ 时，$(R \cup R^0)^1 = R^0 \cup R^1$。

假设命题对 n 成立，即 $(R \cup R^0)^n = R^0 \cup R^1 \cup \cdots \cup R^n$，则考虑 $n + 1$ 时：

$$\begin{aligned}
(R \cup R^0)^{n+1} &= (R \cup R^0)^n \circ (R \cup R^0) \\
&= (R^0 \cup R^1 \cup \cdots \cup R^n) \circ (R \cup R^0) \\
&= ((R^0 \cup R^1 \cup \cdots \cup R^n) \circ R) \cup ((R^0 \cup R^1 \cup \cdots \cup R^n) \circ R^0) \\
&= (R^1 \cup R^2 \cup \cdots \cup R^{n+1}) \cup (R^0 \cup R^1 \cup \cdots \cup R^n) \\
&= R^0 \cup R^1 \cup \cdots \cup R^{n+1}
\end{aligned}$$

构造多个性质的闭包 (V)

关于 $st(R)$ 与 $ts(R)$，我们给出一个直观的例子表明其并不相等。令 $R = \{(1,3)\}$ 是定义在 $A = \{1,2,3\}$ 上的关系，则：

- $st(R) = \{(1,3),(3,1)\}$.
- $ts(R) = \{(1,3),(3,1),(1,1),(3,3)\}$.

自反传递对称闭包

- 上述定理说明，在计算一个关系 R 上的自反对称传递闭包时，计算顺序是很重要的，即传递闭包要放在对称闭包的后面计算，比如：
  - $tsr(R)$ 是 R 的自反对称传递闭包。
  - $str(R)$ 则不一定是 R 的自反对称传递闭包。
- 自反传递对称闭包是个很重要的概念，其相当于是找到了一个最小的等价关系。

阶段总结

- 关系上的 5 个性质。
- 关系的运算对性质的保持。
- 闭包的概念、如何构造闭包。

等价关系及其划分

等价关系的引入

我们经常会遇到一些**相等**的概念，比如：

- 两个数相等。
- 两个命题公式等值。
- 两个程序输出相同。
- 两个数除以 3 的余数相同。

我们对这类关系进行抽象，引入等价关系的概念。

定义 33 **[等价关系].**

令 R 是非空集合 A 上的关系，如果 R 是自反的、对称的和传递的，则称 R 是 A 上的一个等价关系。设 $x, y \in A$，如果 $(x, y) \in R$，则称 x 与 y 等价，记作 $x \sim y$.

等价关系的直观解释

等价关系可以理解成某种意义上的**相等关系**。

- 当一种关系同时满足自反、对称、传递的时候，如果有 $x \sim y$，这意味着在相应的意义下，我们可以用 x 来替代 y，或者 y 来替代 x。

例 34.

我们来看几个例子。

1. 令 $A=\mathbb{N}$，定义 R 为其上的相等关系，即：$R=\{(x,y)|x=y\}$。R 是自反、对称、传递的，从而 R 是 A 上的等价关系。
2. 令 $A=\mathbb{N}$，定义 R 为 A 上除以 3 余数相同的关系，即：$R=\{(x,x)|x\equiv y(\bmod 3)\}$。$R$ 是自反、对称、传递的，从而 R 是 A 上的等价关系。
3. 令 A 是命题逻辑公式的集合，定义 R 为其上的等值关系，即 $R=\{(x,y)|x\Leftrightarrow y\}$，$R$ 是自反、对称、传递的，从而 R 是 A 上的等价关系。
4. 令 A 是命题逻辑公式的集合，定义 R 为其上的蕴含关系，即 $R=\{(x,y)|x\Rightarrow y\}$，$R$ 是自反、传递的，但 R 不是对称的，从而 R 不是 A 上的等价关系。
5. 令 $A=\mathbb{N}$，定义 R 为其上的小于等于关系，即：$R=\{(x,y)|x\leqslant y\}$。R 是自反、传递的，但 R 不是对称的，从而 R 不是 A 上的等价关系。

等价类

我们之前提到，等价关系实际上是某种意义上的相等关系，相等意味着可以替代。

- 比如当我们只关心除以 3 的余数的时候，$1, 4, 7, 10, \ldots$ 都是一样的，因为除以 3 的余数都是 1.
- 比如在命题逻辑公式考虑等值关系的时候，1，$p \vee \neg p$，$p \to p$ 这些公式都是一样的，因为其都是永真式。

一个等价关系可以将集合 A 划分成若干类，其中每类的元素在这个等价关系下是相等的，我们称其为等价类。

定义 35 **[等价类].**

令 R 是集合 A 上的一个等价关系，对于任意的 $x \in A$，我们定义：

$$[x]_R = \{y \in A \mid (x, y) \in R\}$$

称 $[x]_R$ 是 x 在 R 下的等价类。

等价类举例

考察定义在 $\mathbb{N}$ 上的等价关系 $R = \{(x, y) \mid x \equiv y \pmod 3\}$。我们有如下 3 个等价类：

- $[0]_R = [3]_R = [6]_R = \{0, 3, 6, 9, \ldots\}$.
- $[1]_R = [4]_R = [7]_R = \{1, 4, 7, \ldots\}$.
- $[2]_R = [5]_R = [8]_R = \{2, 5, 8, \ldots\}$.

- 不同的等价类之间是不相交的，且所有的等价类的并是整个集合。
- 对于每个集合中的等价类，我们可以使用其中任何一个元素来代表这个等价类。

定理 36.

令 R 是 A 上的一个等价关系，则对于任意的 $x, y \in A$，有：

- $x \in [x]_R$.
- $[x]_R = [y]_R$ 当且仅当 $(x, y) \in R$.
- $[x]_R \cap [y]_R \neq \emptyset$ 当且仅当 $[x]_R = [y]_R$.
- $[x]_R \cap [y]_R = \emptyset$ 当且仅当 $(x, y) \notin R$.
- $\cup\{[x]_R \mid x \in A\} = A$

我们提到，等价类其实表示我们可以用其中一个元素来表示集合中的任何一个元素，从而我们引入商集的概念。

定义 37 [商集].

令 R 是集合 A 上的一个等价关系，我们定义 A 的商集为：

$$A/R = \{[x]_R \mid x \in A\}$$

商集的直观解释

- 商集可以理解成将每个等价类选取一个代表元组成的集合。
- 商集的元素是等价类。

例 38.

考虑定义在 $\mathbb{N}$ 上的等价关系 $R = \{(x, y) \mid x \equiv y \pmod 3\}$，则 $\mathbb{N}$ 的商集为：

$$\mathbb{N}/R = \{[0]_R, [1]_R, [2]_R\}$$

注意到由于等价类之间是不相交的，上述等价类或者说商集把整个集合 A 分解成了若干个不相交的子集，我们称这样的分解为划分。

定义 39 [划分].

设 A 是非空集合，若 A 的子集族 $\pi = \{A_1, \ldots A_n\}$ 满足：

- $\cup_{i=1}^{n} A_i = A$.
- 对任意的 $i \neq j$ 有 $A_i \cap A_j = \emptyset$,

则称 π 是集合的一种划分。A_i 则称为划分块。

划分举例

令集合 $A = \{1, 2, 3, 4\}$，考察如下 4 个划分：

- $\pi_1 = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$
- $\pi_2 = \{\{1\}, \{2\}, \{3, 4\}\}$
- $\pi_3 = \{\{1, 2, 3\}, \{3, 4\}\}$
- $\pi_4 = \{\{1\}, \{3, 4\}\}$

其中 π_1, π_2 是关于 A 的划分，而 π_3, π_4 则不是。

商集是一种划分!

对于任何一个等价关系 R 而言，其商集 A/R 是 A 的一种划分。

等价关系的理解-划分的粗细

等价关系提供了一种对集合的划分方式。以自然数集 $\mathbb{N}$ 为例:

- **相等关系**提供了一个最细的划分方式，即每个元素都是一个划分块。
- **除以 3 余数相同的关系**提供了一种划分方式，将整个集合划分成了 3 个块。在该意义下，我们实际上仅对 3 个元素进行操作。
- **全关系**提供了一种最粗的划分方式，即整个集合只有一个划分块。

等价关系的比较

对于在 A 上的两个等价关系 R_1，R_2，如果我们有 $R_1 \subseteq R_2$，则我们称 R_1 是一个更小的等价关系，因为其提供了更细的划分方式。

阶段总结

上海师范大学 Shanghai Normal University

- 等价关系的概念。
- 等价类。
- 等价关系的本质-划分。

偏序关系

序关系的引入

研究问题的时候，除了等价关系，我们也会关注一些大小的概念，比如：

- 在自然数中我们可以定义诸如 $\leqslant, \geqslant$ 的关系。
- 在集合中我们会比较两个集合大小的关系 $\subseteq$.

我们下面对这类**比较**的关系也作一个刻画，我们引入序关系的概念。

我们首先来介绍偏序关系和逆序关系的概念。

定义 40 **[偏序关系 (Partial Order)].**

令 R 是非空集合 A 上的关系，如果 R 是自反的、反对称的和传递的，则称 R 是 A 上的一个偏序关系。偏序关系一般可记作 $\leqslant$。

定义 41 **[强偏序关系].**

令 R 是非空集合 A 上的关系，如果 R 是反自反的和传递的，则称 R 是 A 上的一个强偏序关系。偏序关系一般可记作 $<$。

直观理解

偏序关系和强偏序关系实际上表示了 A 中元素类似 $\leqslant$ 和 $<$ 的大小关系，但是这**不代表其中任何两个元素都会有这个关系**。

例 42.

- 令 $A = \mathbb{N}$，定义 R 为其上的小于等于关系，即：$R = \{(x, y) | x \leqslant y\}$。$R$ 是自反、反对称、传递的，从而 R 是 A 上的偏序关系。
- 令 $A = \mathbb{N}$，定义 R 为其上的小于关系，即：$R = \{(x, y) | x < y\}$。R 是反自反的、传递的，从而 R 是 A 上的强偏序关系。
- 令 A 是集合，定义 R 为 $\mathfrak{P}(A)$ 上的包含关系，即：$R = \{(x, y) | x \subseteq y\}$。$R$ 是自反、反对称、传递的，从而 R 是偏序关系。

比较

偏序关系其实代表了元素之间的**比较**。因此在偏序序关系 R 中，如果 $(x, y) \in R$ 或者 $(y, x) \in R$，则我们可以说 x 和 y 是可比较的，否则我们说 x 和 y 是不可比较的。

定理 43.

令 A 是一个集合，则:

- 对于其上的偏序关系 R, $R - R^0$ 是 A 上的强偏序关系,
- 对于其上的强偏序关系 R, $R \cup R^0$ 是 A 上的偏序关系。

这说明只要搞清楚偏序关系，我们就很容易获得一个强偏序关系。下面我们主要关注偏序关系。特别的，集合 A 与其上的偏序关系 R 一起称作一个结构，或称偏序集，我们一般用 (A, R) 来表示。

特别的，如果我们用 $\leqslant$ 表示某个偏序关系，则 $<$ 用来表示相应的强偏序关系。(即去除自反性)

偏序关系其实为我们提供了一种比较集合元素大小的方式。为此我们引入一些大小的概念。这些概念和我们熟知的其实表达意思是一致的。

定义 44 **[最大元与最小元].**

令 $(A, \leqslant)$ 是一个偏序集，B 是 A 的子集。令 $x \in B$，如果对于任意的 $y \in B$，有 $y \leqslant x$，则称 x 是 A 的最大元。如果对于任意的 $y \in B$，有 $x \leqslant y$，则称 x 是 B 的最小元。

例 45.

最大元和最小元其实表示了集合中最大与最小的元素，但不是所有的偏序关系上都有最大元和最小元，如:

- 在 $(\mathbb{N}, \leqslant)$ 中，对于 $\mathbb{N}$ 来说只有最小元 0，没有最大元。

最大元和最小元其实反映了一个元素要能够跟**任何一个其他元素作比较**，这是一个很强的条件。

我们引入弱一些的概念，极大元与极小元。其只要求跟所有能比较的元素进行比较即可。

定义 46 **[极大元与极小元].**

令 $(A, \leqslant)$ 是一个偏序集，B 是 A 的子集。令 $x \in B$，如果对于任意的 $y \in B$，$x \leqslant y$，有 $x = y$，则称 x 是 A 的极大元。如果对于任意的 $y \in B$，$y \leqslant x$，有 $x = y$，则称 x 是 B 的极小元。

极大元极小元与最大元最小元的区别

我们考察如下的一个例子，令集合 $A = \{2, 3, 4, 6, 9, 12, 18\}$，定义 R_A 为其上的整除关系，显然 (A, R_A) 是一个偏序集。对于集合 $\{2, 3, 6\}$ 来说：

- 其没有最小元，最大元为 6
- 2, 3 都是其极小元，6 是其极大元。

关于最大最小、极大极小元

- 最大元 (最小元) 必是极大元（极小元）。
- 最大元 (最小元) 不一定存在，存在必唯一。
- 对于非空集合 A，极大元（极小元）一定存在，但不一定唯一。

有了上述定义后，我们还可以类似定义出集合的上下界和上确界。

定义 47 **[上下界、上下确界].**

令 $(A, \leqslant)$ 是一个偏序集，$B \subseteq A$，进一步我们定义：

- $y \in A$ 被称作 B 的上界，如果对于任意的 $x \in B$，有 $x \leqslant y$.
- $y \in A$ 被称作 B 的下界，如果对于任意的 $x \in B$，有 $y \leqslant x$.
- $y \in A$ 被称作 B 的上确界，如果 y 是集合 $\{y \mid y是\ B\ 的上界\}$ 的最小元。
- $y \in A$ 被称作 B 的下确界，如果 y 是集合 $\{y \mid y是\ B\ 的下界\}$ 的最大元。

例 48.

在之前的例子中，对于集合 $\{2, 3, 6\}$ 来讲，

- 其没有下界和下确界。
- 其上界为 6，12，18，上确界为 6.

通俗来说，偏序关系定义了集合上的一个比较大小的关系，但是在偏序关系中**并不是任何元素都能相互比较的**，比如在 $(\mathscr{P}(\mathbb{N}), \subseteq)$ 中：

- $\{1,2\}$ 和 $\{1,3\}$ 是不可比较的。
- $\{1,2\}$ 和 $\{1,2,3\}$ 是可比较的，我们有 $\{1,2\} \subseteq \{1,2,3\}$。

如果在一个偏序关系中，任何两个元素都是可以比较的，则我们称其为全序。

定义 49 **[全序关系 (total order)].**

对偏序集 $(A, \leqslant)$，如果对于任意的 $x, y \in A$，x, y 都是可比较的，即有 $x \leqslant y$ 或者 $y \leqslant x$，则称 $\leqslant$ 是 A 上的一个全序关系，$(A, \leqslant)$ 称为全序集。

- $(\mathbb{N}, \leqslant)$，$(\mathbb{R}, \leqslant)$ 都是全序关系。
- 可以看到在全序关系中，一个集合的极大元和最大元 (极小元和最小元)是一致的。

我们观察如下两个全序集：$(\mathbb{N}, \leqslant)$ 和 $(\mathbb{R}, \leqslant)$:

- 对于 $\forall B \subseteq \mathbb{N}$，$B$ 都有个最小元。
- 而对于 $\forall B \subseteq \mathbb{R}$，$B$ 不一定有最小元。

我们将满足前面性质的序关系称为良序关系。

定义 50 **[良序关系 (well order)].**

对偏序集 $(A, \leqslant)$，如果对于任意的 $B \subseteq A$，B 都有最小元，则称 $\leqslant$ 是 A 上的一个良序关系，$(A, \leqslant)$ 称为良序集。

良序关系的定义

定义中没有要求 $(A, \leqslant)$ 是全序集，这是因为最小元的存在已经能保证这是全序关系。

序关系的应用-无穷递降法

上海师范大学 Shanghai Normal University

我们现在来简单展示序关系的一个应用-**无穷递降法**。

良序集的一个重要性质是，其任一非空集合都有最小元。从而我们有一种新的归谬思路，假设我们需要证明某个命题 $P(x)$ 在集合 A 上不成立，其中 $(A, \leqslant)$ 是一个良序集。

- 假设 $P(a)$ 成立。
- 推导出存在 a' 使其满足 $P(a')$ 也成立并且 $a' < a$。

那么我们就可以说明 $P(x)$ 在 A 上不成立. 为什么?

- 这意味着我们存在一个无穷递降序列 $a > a' > a'' > \dots.$ 使得命题都成立，但由于其是一个良序集，因此它一定存在最小元，从而产生矛盾。

例 51.

证明：$\sqrt{2}$ 不是有理数。**证明：** 假设 $\sqrt{2}$ 是有理数，即存在 $p, q \in \mathbb{N}$ 使得 $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$，注意到：

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \Rightarrow 2q^2 = p^2 \Rightarrow 2|p^2 \Rightarrow 2|p$$

从而存在 $p' \in \mathbb{N}$ 使得 $p = 2p'$，代入上式得到：

$$2q^2 = p^2 \Rightarrow 2q^2 = 4p'^2 \Rightarrow q^2 = 2p'^2$$

从而存在 $q' \in \mathbb{N}$ 使得 $q = 2q'$，这意味着 $\sqrt{2} = \frac{p'}{q'}$，而 $p' + q' < p + q$。从而矛盾。

事实上，任何一个集合都可以被良序化，下属定理也是选择公理的等价形式。

定理 52 **[良序定理].**

任意的集合都是可以良序化的。

在本节的最后，我们来介绍偏序关系的一种图表示方法-哈斯图 (Haase Diagram)，其是对关系图的一个简化。通俗来讲，它希望通过序关系将集合中的元素啊从下至上的进行排列。

定义 53.

令 $(A, \leqslant)$ 为偏序集，对于任意的 $x, y \in A$，如果 $x < y$ 并且不存在 $z \in A$ 使得 $x < z < y$，则称 y 覆盖 x.

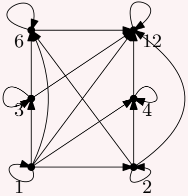
定义 54 [哈斯图].

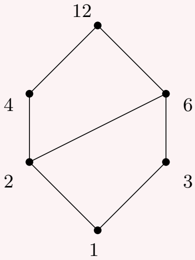
令 $(A, \leqslant)$ 为偏序集，其哈斯图构造如下:

- 每个顶点代表 A 的一个元素。
- 如果 $x \leqslant y$ 且 $x \neq y$，则将 y 放在 x 的上方。
- 如果 y 覆盖 x，则在 y, x 之间连一条无向边。

例 55.

- 考察集合 $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ 和其上的整除关系。下面左图展示了其关系图，右图则展示了其哈斯图。





哈斯图其实提供了对偏序关系一种直观表示:

- 偏序关系可以理解成将集合中的元素表示成若干从小到的序列。
- 全序关系的哈斯图是怎么样的? **一条链!**

阶段总结

- 偏序关系的定义。
- 最大元、最小元、极大元、极小元。
- 全序关系和良序关系。
- 哈斯图。