

第一次作业-solution

Lecturer: 杨启哲

Last modified: 2025 年 10 月 1 日

1. 请判断下列语句哪些是命题？在是命题的句子中，哪些是简单命题？真命题？哪些命题的真值还不知道？

- (1) 2025 年世俱杯冠军是切尔西。
- (2) $2x + 3 < 5$ ，其中 x 是任意实数。
- (3) 对于任意实数 x ， $2x + 3 < 5$ 。
- (4) 9 是合数的充要条件是它是奇数。
- (5) 吸烟请到吸烟室去。
- (6) 我只知道一件事，那就是什么都不知道。

解答.

- 命题：(1)(3)(4)。
- 简单命题：(1)(3)。
- 真命题 (1)(4)。
- 不知道真值的命题：无。

□

2. 将下列命题符号化。

- (1) 2 是偶数。
- (2) 不但 π 是无理数，而且自然对数的底 e 也是无理数。
- (3) 除非 $2 < 1$ ，否则 $3 < 2$ 。
- (4) 如果 $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ 不是有理数，那么 $\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}}}$ 是有理数。
- (5) 火车比轮船快。
- (6) 飞机比火车快。

注 0.1

思考一下，**火车比轮船快**和**飞机比火车快**这两个命题的符号化是不是有缺陷？直观上来说，我们应该可以得到**飞机比轮船快**的结论，但是从符号化的角度来说我们似乎没法用这两个命题来表示**飞机比轮船快**；而这就是命题逻辑的局限性。

解答. 我们可以将其符号化如下：

- (1) 令 p : 2 是偶数。则该命题表示为 p .
- (2) 令 p : π 是物理书, q : 自然对数的底 e 是无理数。则该命题表示为 $p \wedge q$.
- (3) 令 p : $2 < 1$, q : $3 < 2$. 则该命题表示为 $\neg p \rightarrow q$ 或者 $\neg q \rightarrow p$.
- (4) 令 p : $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ 是有理数, q : $\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}}}$ 是有理数。则该命题表示为 $\neg p \rightarrow q$.
- (5) 令 p : 火车比轮船快。则该命题表示为 p .
- (6) 令 p : 飞机比火车快。则该命题表示为 p .

□

3. 当 p, q 的真值为 0, r 的真值为 1 时, 求下列公式的真值。

- (1) $p \vee (q \wedge r)$.
- (2) $(p \leftrightarrow r) \vee (\neg q \wedge p)$.
- (3) $(\neg r \wedge q) \leftrightarrow (p \wedge \neg q)$.

解答. 当 $p = q = 0, r = 1$ 时:

- $p \vee (q \wedge r)$ 的真值为 0。
- $(p \leftrightarrow r) \wedge (\neg q \wedge p)$ 的真值为 0。
- $(\neg r \wedge q) \leftrightarrow (p \wedge \neg q)$ 的真值为 1。

□

4. 用真值表判断下列公式的类型, 并指出它们的成真赋值和成假赋值。

- (1) $((p \wedge q) \rightarrow p) \vee r$.
- (2) $((p \rightarrow r) \wedge q) \rightarrow (p \rightarrow r)$.
- (3) $(\neg(q \rightarrow p)) \wedge p \wedge r$.

解答. 这里只列出真值表最后一项:

(1) $((p \wedge q) \rightarrow p) \vee r$ 为重言式, 所有赋值都是成真赋值。

p	q	r	$((p \wedge q) \rightarrow p) \vee r$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

(2) $((p \rightarrow r) \wedge q) \rightarrow (p \rightarrow r)$ 为重言式，所有赋值都是成真赋值。

p	q	r	$((p \rightarrow r) \wedge q) \rightarrow (p \rightarrow r)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

(3) $(\neg(q \rightarrow p)) \wedge p \wedge r$ 为矛盾式，所有赋值都是成假赋值。

p	q	r	$(\neg(q \rightarrow p)) \wedge p \wedge r$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

□

5. 考虑下面的公式：

$$(A \rightarrow (B \leftrightarrow C)) \rightarrow (((A \wedge B \wedge \neg C) \rightarrow (\neg B \vee C)) \rightarrow (A \rightarrow (B \leftrightarrow C))).$$

(1) 用真值表的方法证明其是重言式。

(2) 利用 $P \rightarrow (Q \rightarrow P)$ 是重言式的事实，证明该公式是重言式。

注 0.2

大家可以自己思考一下，你认为代入规则的引入，是否让重言式的证明变得更为简单？

解答. (1) $P \rightarrow (Q \rightarrow P)$ 的真值表如下：

A	B	C	$(A \rightarrow (B \leftrightarrow C)) \rightarrow (((A \wedge B \wedge \neg C) \rightarrow (\neg B \vee C)) \rightarrow (A \rightarrow (B \leftrightarrow C)))$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

从而上式为重言式。

(2) 在 $P \rightarrow (Q \rightarrow P)$ 中, 令:

- 将 P 替换为 $A \rightarrow (B \leftrightarrow C)$ 。
- 将 Q 替换为 $(A \wedge B \wedge \neg C) \rightarrow (\neg B \vee C)$ 。

则:

$P \rightarrow (Q \rightarrow P)$ 转换为 $(A \rightarrow (B \leftrightarrow C)) \rightarrow (((A \wedge B \wedge \neg C) \rightarrow (\neg B \vee C)) \rightarrow (A \rightarrow (B \leftrightarrow C)))$

从而 $(A \rightarrow (B \leftrightarrow C)) \rightarrow (((A \wedge B \wedge \neg C) \rightarrow (\neg B \vee C)) \rightarrow (A \rightarrow (B \leftrightarrow C)))$ 是重言式。

□