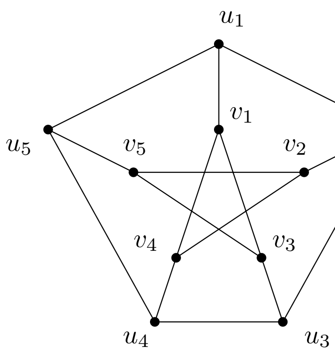
离散数学 Week 12

第十二次作业-solution

Lecturer: 杨启哲 Last modified: 2025 年 12 月 28 日

1. 试求 Peterson 图 G 的点连通度 $\kappa(G)$ 和边连通度 $\lambda(G)$，并给出相应的点割集和边割集。



解答. $\kappa(G) = \lambda(G) = 3$, 一个点割集为 $\{u_5, v_1, u_2\}$, 一个边割集为 $\{(u_1, u_5), (u_1, v_1), (u_1, u_2)\}$。 □

2. 设 $G = (V_1, V_2, E)$ 是 k-正则二分图，$k \geqslant 1$，证明：G 中存在完美匹配。

解答. 先证 $|V_1| = |V_2|$。注意到 G 是 k-正则二分图，故有：

$$k|V_1| = |E| = \sum_{v \in V_1} d(v) = k|V_2| \quad \Rightarrow \quad |V_1| = |V_2|$$

下考虑任意的 $S \subseteq |V_1|$，反设存在 S，使得 $|N(S)| < |S|$，则有：

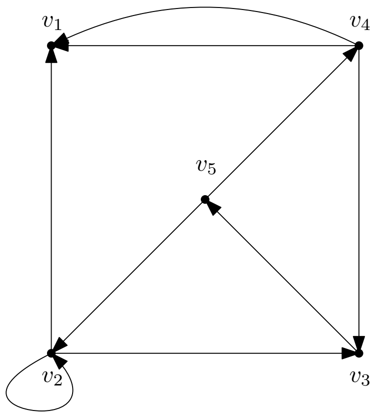
$$k|N(S)| = \sum_{v \in N(S)} d(v) \geqslant \sum_{v \in S} d(v) = k|S|$$

注意到 $|N(S)| < |S|$，从而由抽屉原理，存在 $v \in N(S)$，使得 $d(v) > k$，这与 G 是 k-正则二分图矛盾，故对任意的 $S \subseteq |V_1|$，有 $|N(S)| \geqslant |S|$，从而由 Hall 定理，G 存在完备匹配，由于 $|V_1| = |V_2|$，故 G 存在完美匹配。 □

注 0.1

这里，完美匹配其实就是完备匹配，只是是在 $|V_1| = |V_2|$ 的条件的二分图的完备匹配。

3. 有向图 G 如下图所示，求:



(1) v_2 到 v_5 一共有多少条长度最多为 3 的通路?

(2) v_2 一共有多少条长度恰为 $1, 2, 3, 4$ 的回路?

(3) 图中长度小于等于 4 的通路数和回路数。

(4) 写出 G 的可达矩阵。

解答. G 的邻接矩阵为:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

计算可得:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, A^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

因此我们有:

(1) v_2 到 v_5 长度最多为 3 的通路数 $= A[2][5] + A^2[2][5] + A^3[2][5] = 2$

(2) v_2 长度恰为 $1, 2, 3, 4$ 的回路恰好为 $A[2][2], A^2[2][2], A^3[2][2], A^4[2][2]$，即 $1, 1, 2, 3$

(3) $\leqslant 4$ 的通路数 $=\sum_{k=1}^{4} \sum_{i,j \leqslant 5} (A^k[i][j]) = 72.$

$\leqslant 4$ 的回路数 $=\sum_{k=1}^{4} \sum_{i \leqslant 5} (A^k[i][i]) = 14.$

(4) G 的可达矩阵如下:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

□

4. n 位老师教 n 门课，已知每位教师至少能教两门课程，而每门课程至多有两位老师能教，问：能否每位教师正好教一门课？

解答. 我们将其建模成一张二分图，构造图 $G=(V_1,V_2,E)$，其中：

- V_1 有 n 个顶点，每个顶点 u_1 代表一位老师。
- V_2 有 n 个顶点，每个顶点 v_1 代表一门课程。
- E 中的边 (u_1,v_1) 代表老师 u_1 能教课程 v_1。

由题意，G 满足：

(1) 对任意的 $u\in V_1$, $d(u)\geqslant 2$.

(2) 对任意的 $v\in V_2$, $d(v)\leqslant 2$.

问题转化为：G 中是否存在完备匹配 (完美匹配)?

事实上，注意到：

$$\sum_{u\in V_1} d(u)\geqslant 2n=2|V_1|=2|V_2|=\sum_{v\in V_2} d(v)$$

从而：对任意的 $u\in V_1\cup V_2$，我们有：$d(u)=2$。从而该图是一个 2-正则二分图，由上一题的结论，该图存在完美匹配，即每位老师正好教一门课。 □

5. 证明，如果一个 n 阶无向图至少有 n 条边，则一定存在一个圈。

解答. 我们对 n 进行归纳,$n=1$ 时由于只有自环，命题成立。

假设命题对 $\leqslant n-1$ 个点的图 G 均成立，考察 $|V|=n$ 的情况。我们可以不妨假设 G 是连通的，否则存在一个连通分支 (V',E') 满足 $|V'|<n, |E'|>|V'|$，从而由归纳假设其存在一个圈。现在考虑 G 中的一条边 (u,v)：

- (u,v) 不是割边，即去除 (u,v) 后还存在一条 u 到 v 的路径 π，则 $(u,v)\pi$ 是一个圈。
- (u,v) 是割边，则删去 (u,v) 后图 G 被分解成两个连通分支，注意到其一定存在一个连通分支 (V',E') 满足 $|V'|<n, |E'|>|V'|$，从而由归纳假设其存在一个圈。

从而命题对 n 也成立。 □