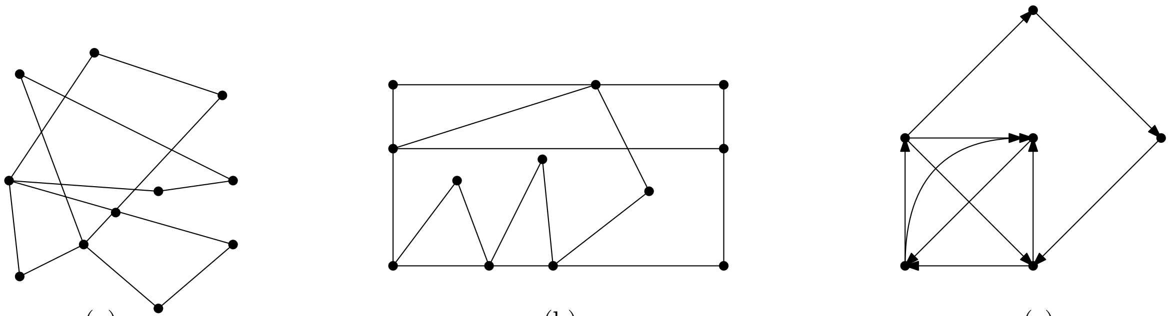
离散数学 Week 13

第十三次作业-solution

Lecturer: 杨启哲 Last modified: 2025 年 12 月 29 日

1. 判断下列图中，哪些是欧拉图?



(a) (b) (c)

解答.

(1) 图 (a) 中的所有节点度数都是偶数，因此是欧拉图。

(2) 图 (b) 中有两个节点的度数为奇数，因此不是欧拉图 (只是半欧拉图)。

(3) 图 (c) 中存在一个节点的入度 $>$ 出度，因此不是欧拉图 (并且由于差 > 1, 都不是半欧拉图)。

□

2. 证明，若 n 个点的无向图 G 满足：对任意的两个不同的顶点 v 和 w，$d(u) + d(v) \geqslant n$，则 G 中一定存在哈密顿回路。

解答. 注意到，对于任意的 u, v 都有:

$$d(u) + d(v) \geqslant n > n - 1$$

从而 G 中存在一条哈密顿通路，记为 $\Gamma = v_1, \ldots, v_n$。下面有两种情况:

- $(v_1, v_n) \in E$，则 $\Gamma \cup \{(v_1, v_n)\}$ 也是一条回路。
- $(v_1, v_n) \notin E$，若存在 $i \in \{3, \ldots, n-1\}$，使得 $(v_1, v_i), (v_{i-1}, v_n) \in E$，则:

$$v_{i-1}, v_n, v_{n-1}, \cdots .v_i, v_1, \ldots, v_{i-2}, v_{i-1}$$

  是一个哈密顿回路。否则，我们有:

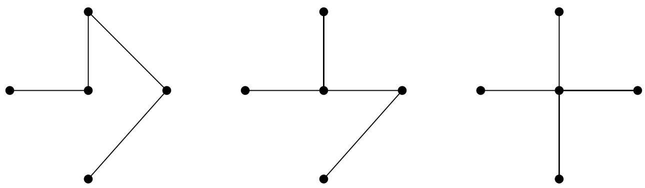
$$d(v_1) + d(v_n) \leqslant d(v_1) + (n - 1 - d(v_1)) = n - 1$$

  与条件矛盾，因此这样的 i 一定存在。

□

3. 请画出完全图 K_5 所有非同构的生成树。

解答. 一共有 3 种，如下所示:



□

注 0.1

这里并没有将 5 个点视作不同的顶点，如果视作不同的顶点，则根据 Cayley 公式，一共有 $5^{5-2} = 125$ 棵不同的生成树。

4. 设 G 是无向连通图，证明若 G 中有割点或者桥，则 G 不是哈密顿图。

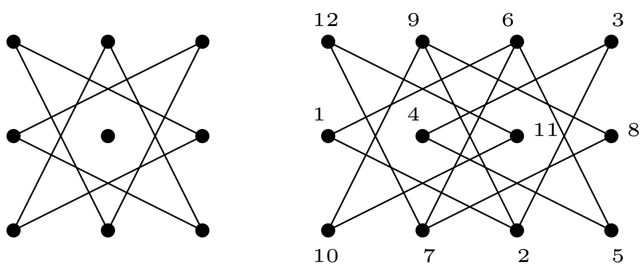
解答. 设 G 中存在割点 v，则删去 v 后图 $G - v$ 会变成两个连通分支，即：$p(G - v) > 1$，从而 G 不是哈密顿图。

另一方面，若 G 存在桥 e，则删去 e 上任何一个端点后图都不连通，从而由上可知 G 不是哈密顿图。 □

5. 国际象棋中的马走日字，即在 (x, y) 位置的马可以走到 $(x \pm 1, y \pm 2)$ 或 $(x \pm 2, y \pm 1)$ 位置（如果这个位置是棋盘上的位置）。马的一个周游指的是可以从棋盘上某个格子开始，走遍所有的格子并且每个格子只走一次:

- 证明：3×4 的棋盘上存在一个马的周游。
- 证明：3×3 的棋盘上不存在马的周游。

解答. 将棋盘转换为图可得:



- 3×4 的棋盘上存在一个马的周游，顺序如右图所示。
- 3×3 的棋盘上不存在马的周游，因为存在一个孤立点。

□