离散数学

组合部分作业-包含答案

Lecturer: 杨启哲　　　　Last modified: 2025 年 4 月 28 日

1. 考虑堆的大小是 $10, 20, 30, 40, 50$ 的 5 堆 Nim 游戏。这局游戏是平衡的么？请给出玩家 I 的第一次取子方案。

解答. 每堆石子的二进制表示如下：

	10	20	30	40	50
1	0	0	0	0	0
2	1	0	1	0	1
4	0	1	1	0	0
8	1	0	1	1	0
16	0	1	1	0	1
32	0	0	0	1	1

- 此游戏是不平衡的。
- 玩家 I 可以通过 20 里取 6，30 里取 26，50 里取 10 来变成平衡 Nim 游戏从而保证必胜。

□

注 0.1

变成平衡 Nim 游戏的方案并不唯一，课上只是提出了一种任意情况下按其操作都可以变成平衡 Nim 游戏的策略。

2. 由 $1, 2, 3, 4$ 这 4 种数字能构成多少个大于 230 的三位数?

解答. 由于 $1, 2, 3, 4$ 这 4 种数字能构成的三位数共有 $4^3 = 64$ 个，其中比 230 小的情况有：

(1) 第一位数字位 1，这样的数字一共有 $4^2 = 16$ 个。
(2) 第一位数字位 2，第二位数字位 1，这样的数字一共有 $4^1 = 4$ 个。
(3) 第一位数字位 2，第二位数字位 2，这样的数字一共有 $4^1 = 4$ 个。

因此超过 230 的三位数有：

$$64 - (16 + 4 + 4) = 40.$$

□

3. 有多少个十进制三位数的数字恰有一个 8 和一个 9?

解答. 注意到第三个数字一共有 8 种可能 $0,1,2,3,4,5,6,7$，每个三元组可以组成 $3! = 6$ 个三位数，而我们需要减去 0 在第一位的情况，因此有：

$$8 \cdot 6 - 2 = 46.$$

□

4. 11^4 等于什么？你能用二项式定理马上给出这个结果吗？

解答. 注意到：

$$11^4 = (10+1)^4 = \sum_{i=0}^{4} \binom{4}{i} 10^i 1^{4-I} = 14641.$$

□

5. 方程 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 30$ 有多少满足 $x_1 \geqslant 2$，$x_3 \geqslant -5$，$x_2, x_4 \geqslant 0$ 的整数解？

解答. 令 $y_1 = x_1 - 1$，$y_3 = x_3 + 6$，$y_2 = x_2 + 1, y_4 = x_4 + 1$，则原方程化为：

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 37$$

注意到满足 $x_1 \geqslant 2$，$x_3 \geqslant -5$，$x_2, x_4 \geqslant 0$ 的整数解恰好是满足上述关于 y_1, y_2, y_3, y_4 方程的正整数解，因此原问题等价于求后者正整数解的个数，即：$\binom{36}{3}$。 □

注 0.2

要区分正整数解和非负整数解的区别。

6. 令 $r \leqslant n$ 是两个正整数，证明下列组合式：

$$\binom{r}{r} + \binom{r+1}{r} + \cdots + \binom{n}{r} = \binom{n+1}{r+1}$$

解答. 只要利用如下的组合恒等式即可：

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

我们有：

$$\begin{aligned}
\binom{r}{r} + \binom{r+1}{r} + \cdots + \binom{n}{r} &= \binom{r+1}{r+1} + \binom{r+1}{r} + \cdots + \binom{n}{r} \\
&= \binom{r+2}{r+1} + \binom{r+2}{r} + \cdots + \binom{n}{r} \\
&= \cdots \\
&= \binom{n}{r+1} + \binom{n}{r} \\
&= \binom{n+1}{r+1}
\end{aligned}$$

□

7. 证明对所有整数 r,k,m 我们有：

$$\binom{r}{m}\binom{m}{k}=\binom{r}{k}\binom{r-k}{m-k}$$

解答. 由定义立得：

$$\binom{r}{m}\binom{m}{k}=\frac{r!}{m!(r-m)!}\frac{m!}{k!(m-k)!}=\frac{r!}{k!(r-k)!}\frac{(r-k)!}{(m-k)!(r-m)!}=\binom{r}{k}\binom{r-k}{m-k}$$

□

注 0.3

也可以利用组合的方式证明，假设我们要从 r 个人中选出 m 个人，然后再从这 m 个人中选出 k 个人，这样的选法有 $\binom{r}{m}\binom{m}{k}$ 种。另一方面，我们也可以先从 r 个人中选出 k 个人，然后再从剩下的 $r-k$ 个人中选出 $m-k$ 个人，这样的选法有 $\binom{r}{k}\binom{r-k}{m-k}$ 种。由于这两种选法都是从 r 个人中选出 m 个人，再从这 m 个人中选出 k 个人，因此这两种选法的结果应该是相同的，即：

$$\binom{r}{m}\binom{m}{k}=\binom{r}{k}\binom{r-k}{m-k}$$

8. 证明下列组合式：

(1) $\sum_{k=r}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{k}{r}=0$

(2) $\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\binom{n}{k}=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$

解答.

(1) 考虑函数：$f(x)=(1+x)^n$，对其求 r 次导数，有：

$$f^{(r)}(x)=n(n-1)\cdots(n-r+1)(1+x)^{n-r}=\sum_{k=r}^{n}\binom{n}{k}\cdot k(k-1)\cdots(k-r+1)x^{k-r}$$

令 $x=-1$ 则有：

$$\begin{aligned}\sum_{k=r}^{n}\binom{n}{k}\cdot k(k-1)\cdots(k-r+1)(-1)^{k-r}=0 \quad &\Rightarrow \quad \sum_{k=r}^{n}\binom{n}{k}\cdot\frac{k(k-1)\cdots(k-r+1)}{r!}(-1)^k=0\\ &\Rightarrow \quad \sum_{k=r}^{n}\binom{n}{k}\binom{k}{r}(-1)^k=0\end{aligned}$$

(2) 我们利用归纳法完成证明，记左边的式子 $\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\binom{n}{k}$ 为 S_n，

$n=1$ 时 $S_1=1$.

假设命题对于 n 成立，即有：

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\binom{n}{k}=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n} \tag{1}$$

考虑 $n+1$ 的情况，我们要证明：

$$\sum_{k=1}^{n+1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\binom{n+1}{k}=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1} \tag{2}$$

注意到 $\binom{n+1}{k}=\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}$，从而等式2可以写成：

$$\sum_{k=1}^{n+1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\binom{n+1}{k}=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\binom{n}{k-1}+\sum_{k=1}^{n+1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\binom{n}{k} \tag{3}$$

其中：

$$\sum_{k=1}^{n+1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\binom{n}{k-1}=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{k}}{k+1}\binom{n}{k}=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{k}}{k+1}\binom{n+1}{k+1}=\frac{1}{n+1}$$

$$\sum_{k=1}^{n+1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\binom{n}{k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\binom{n}{k}=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$$

代入等式3即可得证。

□

9. 设 $S=\{1,2,\ldots,n+1\}$，从 S 中任取 3 个数构成有序三元组 (x,y,z) 满足 $x<y$ 且 $x<z$，令这样的三元组构成的集合称为 P.

(1) 证明：当 $x=k+1$ 时，这样的三元组恰好有 $(n-k)^2$ 个。

(2) 定义如下三个集合：

- $A=\{(x,y,z)\mid y=z\wedge(x,y,z)\in P\}$.
- $B=\{(x,y,z)\mid y<z\wedge(x,y,z)\in P\}$.
- $C=\{(x,y,z)\mid y>z\wedge(x,y,z)\in P\}$.

证明：$|A|=\binom{n+1}{2}$，$|B|=|C|=\binom{n+1}{3}$

(3) 证明：$\sum_{i=1}^{n}i^2=|P|=\binom{n+1}{2}+2\binom{n+1}{3}$

解答.

(1) 当 $x=k+1$ 时，y,z 的取值范围为 $\{k+2,k+3,\ldots,n+1\}$，共有 $n-k$ 个数，从而有 $(n-k)^2$ 个三元组。

(2) 我们先证明 $|A|=\binom{n+1}{2}$，定义如下集合：

$$A'=\{(x,y)\mid x<y\ \wedge\ x,y\in S\}$$

显然 $|A'|=\binom{n+1}{2}$，定义函数 $f:A'\to A$，$f(x,y)=(x,y,y)$，则 f 是一个双射，从而 $|A|=|A'|=\binom{n+1}{2}$。

再证明 $|B|=|C|=\binom{n+1}{3}$，注意到由对称性 $|B|=|C|$ 是显然的，从而只需考虑 B。我们构造如下的从 S 中三元子集到三元组的一个映射：

$$g(S_1)=(x,y,z)\quad 其中\quad S_1=\{x,y,z\}且x<y<z$$

显然 g 是一个双射，而 S 的三元子集一共有 $\binom{n+1}{3}$ 个，从而 $|B|=|C|=\binom{n+1}{3}$。

(3) 由上面两条结果可知:

$$|P| = |A| + |B| + |C| = \binom{n+1}{2} + \binom{n+1}{3} + \binom{n+1}{3} = \binom{n+1}{2} + 2\binom{n+1}{3}.$$

另一方面，由第一问结论可知:

$$|P| = \sum_{k=0}^{n} (n-k)^2 = \sum_{i=1}^{n} i^2.$$

即:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = |P| = \binom{n+1}{2} + 2\binom{n+1}{3}.$$

□

10. 求 n 位 01 串中相邻两位不出现 11 的串的个数。

解答. 设 $f(n)$ 为长度为 n 的 01 串中相邻两位不出现 11 的串的个数，显然:

$$f(1) = 2,\ f(2) = 3$$

现在假设 $\leqslant n-1$ 时个数已经确定，考虑长度为 n 的 01 串:

- 如果最后一位是 0，那么前面可以是任意的长度为 $n-1$ 的 01 串，因此有 $f(n-1)$ 种。
- 如果最后一位是 1，那么倒数第二位只能是 0，因此前面可以是任意的长度为 $n-2$ 的 01 串，因此有 $f(n-2)$ 种。

从而 $f(n) = f(n-1) + f(n-2)$，即 $f(n)$ 是斐波那契数列的第 $n+2$ 项 F_{n+2}。 □