

## 组合部分作业

1. 考虑堆的大小是 10, 20, 30, 40, 50 的 5 堆 Nim 游戏。这局游戏是平衡的么？请给出玩家 I 的第一次取子方案。
2. 由 1, 2, 3, 4 这 4 种数字能构成多少个大于 230 的三位数？
3. 有多少个十进制三位数的数字恰有一个 8 和一个 9？
4.  $11^4$  等于什么？你能用二项式定理马上给出这个结果吗？
5. 方程  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 30$  有多少满足  $x_1 \geq 2$ ,  $x_3 \geq -5$ ,  $x_2, x_4 \geq 0$  的整数解？
6. 令  $r \leq n$  是两个正整数，证明下列组合式：

$$\binom{r}{r} + \binom{r+1}{r} + \cdots + \binom{n}{r} = \binom{n+1}{r+1}$$

7. 证明对所有整数  $r, k, m$  我们有：

$$\binom{r}{m} \binom{m}{k} = \binom{r}{k} \binom{r-k}{m-k}$$

8. 证明下列组合式：

$$(1) \sum_{k=r}^n (-1)^k \binom{n}{k} \binom{k}{r} = 0$$

$$(2) \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \binom{n}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$$

9. 设  $S = \{1, 2, \dots, n+1\}$ ，从  $S$  中任取 3 个数构成有序三元组  $(x, y, z)$  满足  $x < y$  且  $x < z$ ，令这样的三元组构成的集合称为  $P$ 。

(1) 证明：当  $x = k+1$  时，这样的三元组恰好有  $(n-k)^2$  个。

(2) 定义如下三个集合：

- $A = \{(x, y, z) \mid y = z \wedge (x, y, z) \in P\}$ .
- $B = \{(x, y, z) \mid y < z \wedge (x, y, z) \in P\}$ .
- $C = \{(x, y, z) \mid y > z \wedge (x, y, z) \in P\}$ .

证明： $|A| = \binom{n+1}{2}$ ,  $|B| = |C| = \binom{n+1}{3}$

(3) 证明： $\sum_{i=1}^n i^2 = |P| = \binom{n+1}{2} + 2\binom{n+1}{3}$

10. 求  $n$  位 01 串中相邻两位不出现 11 的串的个数。