

第二次作业-solution

Lecturer: 杨启哲

Last modified: 2025 年 10 月 9 日

1. 用等值演算法证明下列等值式。

$$(1) p \rightarrow (q \rightarrow r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \rightarrow r.$$

$$(2) (p \leftrightarrow q) \leftrightarrow ((p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p)) \Leftrightarrow p \wedge \neg p.$$

解答.

(1)

$$\begin{aligned} p \rightarrow (q \rightarrow r) &\Leftrightarrow \neg p \vee (q \rightarrow r) \\ &\Leftrightarrow \neg p \vee (\neg q \vee r) \\ &\Leftrightarrow \neg(p \wedge q) \vee r \\ &\Leftrightarrow (p \wedge q) \rightarrow r \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} (p \leftrightarrow q) \leftrightarrow ((p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p)) &\Leftrightarrow (p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (p \leftrightarrow \neg q) \\ &\Leftrightarrow (p \leftrightarrow (q \wedge \neg q)) \\ &\Leftrightarrow \mathbf{0} \\ &\Leftrightarrow p \wedge \neg p \end{aligned}$$

□

注 0.1

我们也可以按化成 $\neg, \wedge, \vee$ 的方式来证明第 2 问:

$$\begin{aligned} (p \leftrightarrow q) \leftrightarrow ((p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p)) &\Leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (\neg q \wedge \neg p)) \leftrightarrow ((p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p)) \\ &\Leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (\neg q \wedge \neg p)) \rightarrow ((p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p)) \\ &\quad \wedge ((p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p)) \rightarrow ((p \wedge q) \vee (\neg q \wedge \neg p)) \end{aligned}$$

注意到:

$$\begin{aligned}
 & ((p \wedge q) \vee (\neg q \wedge \neg p)) \rightarrow ((p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p)) \\
 & \Leftrightarrow ((p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q)) \rightarrow ((p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p)) \\
 & \Leftrightarrow (\neg((p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q))) \vee ((p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p)) \\
 & \Leftrightarrow ((\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)) \vee ((p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p)) \\
 & \Leftrightarrow ((\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)) \\
 & ((p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p)) \rightarrow ((p \wedge q) \vee (\neg q \wedge \neg p)) \\
 & \Leftrightarrow ((p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)) \rightarrow ((p \wedge q) \vee (\neg q \wedge \neg p)) \\
 & \Leftrightarrow (\neg((p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q))) \vee ((p \wedge q) \vee (\neg q \wedge \neg p)) \\
 & \Leftrightarrow ((\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q)) \vee ((p \wedge q) \vee (\neg q \wedge \neg p)) \\
 & \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (\neg q \wedge \neg p)
 \end{aligned}$$

从而:

$$\begin{aligned}
 (p \leftrightarrow q) & \Leftrightarrow ((p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p)) \Leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (\neg q \wedge \neg p)) \wedge ((p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p)) \\
 & \Leftrightarrow 0 \Leftrightarrow p \wedge \neg p
 \end{aligned}$$

当然略显麻烦一些。

2. 由下列真值表, 分别写从成真赋值和成假赋值的角度写出以 p, q, r 为命题变元的命题公式 A, B 的两个表达式:

p	q	r	A	B
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	0

表 1: 命题公式 A, B 的真值表

解答. 对于 A 来说:

- 从成假赋值来写: $A = (p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r).$
- 从成真赋值来写: $A = (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge r).$

对于 B 来说:

- 从成假赋值来写: $B = (p \vee q \vee r) \wedge (p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r)$.
- 从成真赋值来写: $B = (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r)$.

□

3. 将下列公式化成与之等值的仅含 $\{\neg, \vee\}$ 中联结词的命题公式:

(1) $(p \leftrightarrow r) \wedge q$.

(2) $(p \rightarrow (q \wedge \neg p)) \wedge q \wedge r$.

解答. (1) 由等值演算, 我们有:

$$\begin{aligned} (p \leftrightarrow r) \wedge q &\Leftrightarrow ((p \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg r)) \wedge q \\ &\Leftrightarrow \neg(\neg(p \wedge r) \wedge \neg(\neg p \wedge \neg r)) \wedge q \end{aligned}$$

(2) 由等值演算, 我们有:

$$\begin{aligned} (p \rightarrow (q \wedge \neg p)) \wedge q \wedge r &\Leftrightarrow (\neg p \vee (q \wedge \neg p)) \wedge q \wedge r \\ &\Leftrightarrow \neg(p \wedge \neg(q \wedge \neg p)) \wedge q \wedge r \end{aligned}$$

□

注 0.2

答案并不唯一, 保持等值即可。如若在第二问中注意到:

$$p \rightarrow (q \wedge \neg p) \Leftrightarrow \neg p \vee (q \wedge \neg p) \Leftrightarrow \neg p$$

则可以直接简化为: $\neg p \wedge q \wedge r$.

4. 课件上讲, 与非联结词 $\uparrow$ 可以表示其他的联结词, 如:

$$\begin{aligned} \neg p &\Leftrightarrow p \uparrow p, \\ p \wedge q &\Leftrightarrow (p \uparrow q) \uparrow (p \uparrow q), \\ p \vee q &\Leftrightarrow (p \uparrow p) \uparrow (q \uparrow q), \\ p \rightarrow q &\Leftrightarrow p \uparrow (q \uparrow q), \\ p \leftrightarrow q &\Leftrightarrow (p \uparrow q) \uparrow (q \uparrow p). \end{aligned}$$

请用或非 $\downarrow$ ($p \downarrow q \Leftrightarrow \neg(p \vee q)$) 表示出联结词 $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \uparrow$.

解答. 只需写出 $\neg$ 即可, 注意到:

$$\neg p \Leftrightarrow p \downarrow p$$

从而:

- (1) $\neg p \Leftrightarrow p \downarrow p$.
- (2) $p \vee q \Leftrightarrow \neg(p \downarrow q) \Leftrightarrow (p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q)$.
- (3) $p \wedge q \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q) \Leftrightarrow (p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)$.
- (4) $p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q \Leftrightarrow ((p \downarrow p) \downarrow q) \downarrow ((p \downarrow p) \downarrow q)$.
- (5) $p \uparrow q \Leftrightarrow \neg(p \wedge q) \Leftrightarrow ((p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)) \downarrow ((p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q))$.

□

5. 证明关于对偶式和内否式的两个性质:

- (1) $(\neg A)^* \Leftrightarrow \neg(A^*)$.
- (2) $(\neg A)^- \Leftrightarrow \neg(A^-)$.

解答.

(1) 对 A 的联结词进行归纳:

BASE: $A = p$, 则有 $(\neg A)^* = \neg p = \neg(A^*)$, 即 $(\neg A)^* \Leftrightarrow \neg(A^*)$.

IH: 假设对于 A 的联结词数小于 n 时成立。则当 n 时, A 一定如下三种情况:

(i) $A = \neg A_1$, 则由归纳假设有 $(\neg A_1)^* \Leftrightarrow \neg(A_1^*)$, 从而:

$$(\neg A)^* \Leftrightarrow (\neg \neg A_1)^* \Leftrightarrow (A_1)^* \Leftrightarrow \neg \neg(A_1^*) \Leftrightarrow \neg((\neg A_1)^*) \Leftrightarrow \neg(A^*)$$

(ii) $A = A_1 \vee A_2$, 则由归纳假设有 $(\neg A_1)^* \Leftrightarrow \neg(A_1^*)$, $(\neg A_2)^* \Leftrightarrow \neg(A_2^*)$, 从而:

$$\begin{aligned} (\neg A)^* &\Leftrightarrow (\neg(A_1 \vee A_2))^* \Leftrightarrow (\neg A_1 \wedge \neg A_2)^* \\ &\Leftrightarrow (\neg A_1)^* \vee (\neg A_2)^* \Leftrightarrow \neg(A_1^*) \vee \neg(A_2^*) \Leftrightarrow \neg(A_1^* \wedge A_2^*) \Leftrightarrow \neg(A^*) \end{aligned}$$

(iii) $A = A_1 \wedge A_2$, 则由归纳假设有 $(\neg A_1)^* \Leftrightarrow \neg(A_1^*)$, $(\neg A_2)^* \Leftrightarrow \neg(A_2^*)$, 从而:

$$\begin{aligned} (\neg A)^* &\Leftrightarrow (\neg(A_1 \wedge A_2))^* \Leftrightarrow (\neg A_1 \vee \neg A_2)^* \\ &\Leftrightarrow (\neg A_1)^* \wedge (\neg A_2)^* \Leftrightarrow \neg(A_1^*) \wedge \neg(A_2^*) \Leftrightarrow \neg(A_1^* \vee A_2^*) \Leftrightarrow \neg(A^*) \end{aligned}$$

(2) 对 A 的联结词进行归纳:

BASE: $A = p$, 则有 $(\neg A)^- = p \Leftrightarrow \neg \neg p = \neg(A^-)$, 即 $(\neg A)^- \Leftrightarrow \neg(A^-)$.

IH: 假设对于 A 的联结词数小于 n 时成立。则当 n 时, A 一定如下三种情况:

(i) $A = \neg A_1$, 则由归纳假设有 $(\neg A_1)^- \Leftrightarrow \neg(A_1^-)$, 从而:

$$(\neg A)^- \Leftrightarrow (\neg \neg A_1)^- \Leftrightarrow (A_1)^- \Leftrightarrow \neg \neg(A_1^-) \Leftrightarrow \neg((\neg A_1)^-) \Leftrightarrow \neg(A^-)$$

(ii) $A = A_1 \vee A_2$, 则由归纳假设有 $(\neg A_1)^- \Leftrightarrow \neg(A_1^-)$, $(\neg A_2)^- \Leftrightarrow \neg(A_2^-)$, 从而:

$$\begin{aligned} (\neg A)^- &\Leftrightarrow (\neg(A_1 \vee A_2))^- \Leftrightarrow (\neg A_1 \wedge \neg A_2)^- \\ &\Leftrightarrow (\neg A_1)^- \wedge (\neg A_2)^- \Leftrightarrow \neg(A_1^-) \wedge \neg(A_2^-) \Leftrightarrow \neg(A_1^- \vee A_2^-) \Leftrightarrow \neg(A^-) \end{aligned}$$

(iii) $A = A_1 \wedge A_2$, 则由归纳假设有 $(\neg A_1)^- \Leftrightarrow \neg(A_1^-)$, $(\neg A_2)^- \Leftrightarrow \neg(A_2^-)$, 从而:

$$\begin{aligned}(\neg A)^- &\Leftrightarrow (\neg(A_1 \wedge A_2))^- \Leftrightarrow (\neg A_1 \vee \neg A_2)^- \\&\Leftrightarrow (\neg A_1)^- \vee (\neg A_2)^- \Leftrightarrow \neg(A_1^-) \vee \neg(A_2^-) \Leftrightarrow \neg(A_1^- \wedge A_2^-) \Leftrightarrow \neg(A^-)\end{aligned}$$

□

注 0.3

我将两个完整的结构归纳法的证明都写了出来，方便大家理解，可以看到总体是很像的，但在运算推导的过程中需要仔细区分。