离散数学 Week 3

第三次作业-solution

Lecturer: 杨启哲 Last modified: 2025 年 10 月 20 日

1. 求出下列命题公式的主合取范式和主析取范式。

(1) $(p \vee (q \to r)) \to (p \vee q \vee r)$.

解答. 注意到:

$$
\begin{aligned}
& (p \vee (q \to r)) \to (p \vee q \vee r) \\
\Leftrightarrow\ & \neg(p \vee (q \to r)) \vee (p \vee q \vee r) \\
\Leftrightarrow\ & (\neg p \wedge \neg(q \to r)) \vee (p \vee q \vee r) \\
\Leftrightarrow\ & (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \vee q \vee r) \\
\Leftrightarrow\ & p \vee q \vee r
\end{aligned}
$$

从而其主合取范式为: M_0，主析取范式为: $m_1 \vee m_2 \vee m_3 \vee m_4 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7$。 □

2. 请解释为什么下列公式是等值的:

$$
\begin{aligned}
& (p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \\
\Leftrightarrow\ & (p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r)
\end{aligned}
$$

解答. 注意到前者 $(p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r)$ 的成真赋值为 $111, 011, 001$，而后者的成假赋值为 $000, 010, 100, 101, 110$，从而由等值定义，两个公式是等值的。 □

注 0.1

这道题的设立只是为了大家能有个更好的对主合取范式和主析取范式的理解。

3. 令 S 是一个合取范式，l 是一个出现在 S 中的文字，并且满足 l^c 不出现在 S 中。l^c 的定义为:

$$
l^c = \begin{cases} p, & \text{如果} l = \neg p \\ \neg p, & \text{如果} l = p \end{cases}
$$

将所有含有 l 的简单析取式去掉后得到的合取范式记为 S_l。证明 S 与 S_l 是同可满足的。

解答. 令 S 中出现的变元为 $p_1, \ldots, p_n, l$:

- 假设 S 是可满足的，则存在一个赋值 $\mathcal{A} : \{p_1, \ldots, p_n, l\} \to \{0, 1\}$ 使得 S 为真。构造赋值 $\mathcal{A}' : \{p_1, \ldots, p_n\} \to \{0, 1\}$ 满足 $\mathcal{A}'(p_i) = \mathcal{A}(p_i)$，则由 S_l 的定义，S_l 在赋值 $\mathcal{A}'$ 下也为真，即 S_l 是可满足的。

- 假设 S_l 是可满足的，则则存在一个赋值 $\mathcal{A}:\{p_1,\ldots,p_n\}\to\{0,1\}$ 使得 S_l 为真。令 l_k 为 l 成真的赋值，则构造赋值 $\mathcal{A}':\{p_1,\ldots,p_n,l\}\to\{0,1\}$ 满足:

$$\mathcal{A}'(p)=\begin{cases}\mathcal{A}(p) \text{ if } p=p_i\\ l_k \text{ if } p=l\end{cases}$$

容易验证 S 在此赋值下为真，从而 S 是可满足的。

□

4. 用消解法判断下列公式是否是可满足的:

(1) $(\neg p\vee q)\wedge(\neg q\vee r)\wedge(\neg r\vee p)\wedge(\neg p\vee\neg q\vee r)$.

(2) $(p\vee q)\wedge(p\vee\neg q)\wedge(\neg p\vee r)$

注 0.2

如果能找到一个成真赋值使得公式成立，则公式是可满足的。但这道题希望大家只用消解法来判断，看一下如果一个公式是可满足的，消解法最终会如何停止。（即不会产生新的公式）

解答.

- $(\neg p\vee q)\wedge(\neg q\vee r)\wedge(\neg r\vee p)\wedge(\neg p\vee\neg q\vee\neg r)$ 是可满足的:
  - $\neg p\vee q,\neg q\vee r$ 消解出 $\neg p\vee r$.
  - $\neg q\vee r,\neg r\vee p$ 消解出 $\neg q\vee p$.
  - $\neg r\vee p,\neg p\vee q$ 消解出 $\neg r\vee q$.
  - $\neg r\vee q,\neg q\vee r$ 消解出 $r\vee\neg r=1$(**这不是停止!**)
  - $\neg p\vee\neg q\vee\neg r,\neg p\vee q$ 消解出 $\neg p\vee\neg r$.
  - $\neg p\vee\neg q\vee\neg r,\neg q\vee r$ 消解出 $\neg p\vee\neg q$.
  - $\neg p\vee\neg q\vee\neg r,\neg r\vee p$ 消解出 $\neg q\vee\neg r$.
  - $\neg p\vee\neg q,\neg p\vee q$ 消解出 $\neg p$.
  - $\neg p\vee\neg r,\neg r\vee p$ 消解出 $\neg r$.
  - $\neg q\vee\neg r,\neg q\vee r$ 消解出 $\neg q$.

  最终不能产生新的简单析取式，从而该公式是可满足的。
- $(p\vee q)\wedge(p\vee\neg q)\wedge(\neg p\vee r)$ 也是可满足的:
  - $p\vee q,p\vee\neg q$ 消解成 p。
  - $p\vee q,\neg p\vee r$ 消解成 $q\vee r$.
  - $p\vee\neg q,\neg p\vee r$ 消解成 $\neg q\vee r$。
  - $q\vee r,\neg q\vee r$ 消解成 r.
  - $q\vee r,p\vee\neg q$ 消解成 $r\vee p$.

  最终不能产生新的简单析取式，从而该公式是可满足的。

□

5. 将下列推理形式化，并证明该推理是不正确的。

如果 a 和 b 之积是负数，那么 a 和 b 中恰好有一个负数。a 和 b 之积不是负数，所以 a 和 b 都不是负数。

解答. 令 $p: a$是负数，$q: b$是负数, $r: ab$之积是负数，则推理可表示为:

$$\{r \to p \oplus q, \neg r\} \vdash \neg p \land \neg q$$

该推理是不正确的，因为在 $p = 1, q = 1, r = 0$ 这一赋值下前提为真，但结论为假。 □

6. 在自然推理系统 P 中构造下面推理的证明:

$$\{\neg p \lor r, \neg q \lor s, p \land q\} \vdash t \to (r \land s)$$

解答. 我们证明 $\{\neg p \lor r, \neg q \lor s, p \land q, t\} \vdash (r \land s)$。证明过程如下:

(1)	$p \land q$	前提
(2)	p	1, 化简
(3)	$\neg p \lor r$	前提
(4)	r	2,3 析取三段论
(5)	q	1, 化简
(6)	$\neg q \lor s$	前提
(7)	s	5,6 析取三段论
(8)	$r \land s$	4,7 合取引入

□