

第四次作业-solution

Lecturer: 杨启哲

Last modified: 2025 年 10 月 27 日

1. 我们考虑一个特殊的证明系统，该系统与消解证明系统类似，只不过一共有两个特殊的推理规则：

$$\frac{l \vee C_1 \quad \neg l \vee C_2}{C_1 \vee C_2} \quad (R1) \quad \frac{l \vee C_1 \quad l \vee C_2}{C_1 \vee C_2} \quad R2$$

即在原本的消解证明系统下添加了一个规则，请在该推理系统下构造如下三个推理的证明：

(1) $\{p \vee q, p \rightarrow r, q \rightarrow s\} \Rightarrow r \vee s$.

(2) $\{p \vee q, \neg p \vee r, q \vee s\} \Rightarrow r$.

(3) $\{p \vee q, \neg p \vee r, q \vee s\} \Rightarrow \neg r$.

并思考一下，这个证明系统你认为是好的么？

注 0.1

这一问是想大家意识到，证明其实跟真值（语义）无关，它只是语法上的推导。所以当证明系统定义的不好的时候，他就会产生和语义上不一样的结果。

解答.

(1) 利用消解证明系统，实际上要证的是： $\{p \vee q, \neg p \vee r, \neg q \vee s, \neg r, \neg s\} \Rightarrow 0$ ，证明如下：

(i) $p \vee q$	前提
(ii) $\neg p \vee r$	前提
(iii) $q \vee r$	1,2 R1
(iv) $\neg q \vee s$	前提
(v) $r \vee s$	3,4 R1
(vi) $\neg r$	前提
(vii) s	5,6 R1
(viii) $\neg s$	前提
(ix) 0	7,8 R1

(2) 利用消解证明系统，实际上要证的是： $\{p \vee q, \neg p \vee r, q \vee s, \neg r\} \Rightarrow 0$ ，证明如下：

(i) $p \vee q$	前提
(ii) $\neg p \vee r$	前提
(iii) $q \vee r$	1,2 R1
(iv) $q \vee s$	前提
(v) $r \vee s$	3,4 R2

(vi) $\neg r$	前提
(vii) s	5,6 R1
(viii) r	5,7 R2
(ix) 0	7,8 R1

(3) 利用消解证明系统，实际上要证的是： $\{p \vee q, \neg p \vee r, q \vee s, r\} \Rightarrow 0$ ，证明如下：

(i) $p \vee q$	前提
(ii) $\neg p \vee r$	前提
(iii) $q \vee r$	1,2 R1
(iv) $q \vee s$	前提
(v) $r \vee s$	3,4 R2
(vi) r	前提
(vii) $\neg p$	2,6 R2
(viii) q	1,7 R1
(ix) p	1,8 R2
(x) 0	7,9 R1

整个证明系统并不是一个好的证明系统，因为他会产生和语义上不一样的结果。 $\square$

2. 分别给出一个成真和成假的解释，来说明下列公式是可满足式。

- (1) $(\exists x F(x)) \rightarrow F(x)$.
- (2) $\exists(F(x) \wedge \forall y(G(y) \wedge H(x, y)))$.

解答. 不妨假定个体域均为自然数集合 $\mathbb{N}$ 。

- 考察解释 $\mathfrak{J}_1$ ，其中 $\sigma(x) = 1, a(F)(x) = x > 1$ ，则上述公式在该解释下为 $(\exists x x > 1) \rightarrow (1 > 1)$ ，为假。
考察解释 $\mathfrak{J}_2$ ，其中 $\sigma(x) = 2, a(F)(x) = x > 1$ ，则上述公式在该解释下为 $(\exists x x > 1) \rightarrow (2 > 1)$ ，为真。
- 考察解释 $\mathfrak{J}_1$ ，其中 $a(F)(x) = x > 1, a(G)(x) = x > 0, a(H)(x, y) = x > y$ ，则上述公式在该解释下为 $\exists x ((x > 1) \wedge \forall y ((y > 0) \wedge (x > y)))$ ，为假。
考察解释 $\mathfrak{J}_2$ ，其中 $a(F)(x) = x > 1, a(G)(x) = x > 0, a(H)(x, y) = x + y > 0$ ，则上述公式在该解释下为 $\exists x ((x > 1) \wedge \forall y ((y > 0) \wedge (x + y > 0)))$ ，为真。

$\square$

3. 假设符号集包括常量 a ，函数 f ，谓词符号 F, G 。给定解释 $I = (\mathbb{R}, a)$ 和赋值 σ 如下：

- (1) 个体域为实数集合 $\mathbb{R}$ 。
- (2) $a(a) = 0$ 。
- (3) $a(f)(x, y) = xy + x + y$ 。
- (4) $a(F)(x, y) = x \equiv y, a(G)(x, y) = x > y$ 。

(5) $\sigma(x) = 1, \sigma(y) = -1$

给出下列公式在 I 和 σ 下的解释, 并指出它们的真值。

(1) $\forall x(G(x, y) \rightarrow \exists y F(x, y))$.

(2) $\forall y(F(f(x, y), a) \rightarrow \forall x G(x, y))$.

解答.

(1) $\forall x((x > -1) \rightarrow (\exists y x \equiv y))$, 真命题。

(2) $\forall y((y + 1 + y \equiv 0) \rightarrow (\forall x x > y))$, 假命题。

□

4. 判断下列公式的类型:

(1) $F(x) \rightarrow \forall x F(x)$.

(2) $\forall x(F(x) \rightarrow G(x)) \rightarrow (\forall x F(x) \rightarrow \forall x G(x))$.

解答.

(1) 该公式为可满足式。

- 令解释 $\mathfrak{J}$ 取为 $\mathfrak{J} = (\mathfrak{A} = (\mathbb{R}, a), \sigma)$, 其中 $a(F)(x) = x \geq 0$, 赋值 σ 满足; $\sigma(x) = 1$, 则该公式在 I 下为假。
- 令解释 $\mathfrak{J}$ 取为 $\mathfrak{J} = (\mathfrak{A} = (\mathbb{N}, a), \sigma)$, 其中 $a(F)(x) = x \geq 0$, 赋值 σ 满足; $\sigma(x) = 1$, 则该公式在 I 下为真。

(2) 该公式为永真式。考察任意一个解释 $\mathfrak{J} = (\mathfrak{A}, \sigma)$, 其中 $\mathfrak{A} = (D, a)$:

- 若在 $\mathfrak{J}$ 下 $\forall x(F(x) \rightarrow G(x))$ 为假, 则整个公式在 $\mathfrak{J}$ 下为真。
- 若在 $\mathfrak{J}$ 下 $\forall x(F(x) \rightarrow G(x))$ 为真, 则对任意的 $a \in D$, 均有 $a(F)(a) \rightarrow a(G)(a)$; 若存在 a 使得 $a(F)(a)$ 为假, 则 $\forall x F(x)$ 在 $\mathfrak{J}$ 下为假, 从而 $\forall x F(x) \rightarrow \forall x G(x)$ 在 $\mathfrak{J}$ 下为真; 若对任意的 $a \in D$, 均有 $a(F)(a)$ 为真, 则对任意的 $a \in D$, 均有 $a(G)(a)$ 为真, 从而 $\forall x F(x) \rightarrow \forall x G(x)$ 在 $\mathfrak{J}$ 下为真。

因此整个公式在 $\mathfrak{J}$ 下为真, 由 $\mathfrak{J}$ 的任意性可知该公式为永真式。

□

5. 利用定义证明 $(\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)) \leftrightarrow (\forall x (P(x) \wedge Q(x)))$ 是永真式, 并给出一个解释说明当 $\wedge$ 换成 $\vee$ 上式就不是永真式了。

解答. 考察任意一个解释 $\mathfrak{J} = (\mathfrak{A}, \sigma)$, 其中 $\mathfrak{A} = (D, a)$:

- 若在 $\mathfrak{J}$ 下 $\forall x (P(x) \wedge Q(x))$ 为真, 则对任意的 $a \in D$, 均有 $a(P)(a) \wedge a(Q)(a)$ 为真, 从而 $\forall x P(x)$ 和 $\forall x Q(x)$ 在 $\mathfrak{J}$ 下为真。

- 若在 $\mathfrak{J}$ 下 $\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$ 为真, 则 $\forall x P(x)$ 和 $\forall x Q(x)$ 在 $\mathfrak{J}$ 下均为真, 即对任意的 $a \in D$, 均有 $a(P)(a)$ 和 $a(Q)(a)$ 为真, 从而 $\forall x (P(x) \wedge Q(x))$ 在 $\mathfrak{J}$ 下为真。

因此整个公式在 $\mathfrak{J}$ 下为真, 由 $\mathfrak{J}$ 的任意性可知该公式为永真式。

若换成 $\vee$ 则不再为永真式, 考察如下的一个解释 $\mathfrak{J}$ 取为 $\mathfrak{J} = (\mathfrak{A} = (\mathbb{Z}, a), \sigma)$, 其中:

- $a(P)(x) = x$ 为偶数
- $a(Q)(x) = x$ 为奇数。

则 $\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$ 在 $\mathfrak{J}$ 下为假, 而 $\forall x (P(x) \vee Q(x))$ 在 $\mathfrak{J}$ 下为真, 从而上述公式为假。 $\square$