

第四次作业

Lecturer: 杨启哲

Last modified: 2025 年 10 月 21 日

截止日期 2025 年 10 月 27 日晚 24: 00

1. 我们考虑一个特殊的证明系统，该系统与消解证明系统类似，只不过一共有两个特殊的推理规则：

$$\frac{l \vee C_1 \quad \neg l \vee C_2}{C_1 \vee C_2} \quad (R1) \quad \frac{l \vee C_1 \quad l \vee C_2}{C_1 \vee C_2} \quad R2$$

即在原本的消解证明系统下添加了一个规则，请在该推理系统下构造如下三个推理的证明：

(1) $\{p \vee q, p \rightarrow r, q \rightarrow s\} \Rightarrow r \vee s$.

(2) $\{p \vee q, \neg p \vee r, q \vee s\} \Rightarrow r$.

(3) $\{p \vee q, \neg p \vee r, q \vee s\} \Rightarrow \neg r$.

并思考一下，这个证明系统你认为是好的么？

注 0.1

这一问是想大家意识到，证明其实跟真值（语义）无关，它只是语法上的推导。所以当证明系统定义的不好的时候，他就会产生和语义上不一样的结果。

2. 分别给出一个成真和成假的解释，来说明下列公式是可满足式。

(1) $(\exists x F(x)) \rightarrow F(x)$.

(2) $\exists (F(x) \wedge \forall y (G(y) \wedge H(x, y)))$.

3. 假设符号集包括常量 a , 函数 f , 谓词符号 F, G 。给定解释 $I = (\mathbb{R}, a)$ 和赋值 σ 如下:

(1) 个体域为实数集合 $\mathbb{R}$ 。

(2) $a(a) = 0$ 。

(3) $a(f)(x, y) = xy + x + y$ 。

(4) $a(F)(x, y) = x \equiv y$, $a(G)(x, y) = x > y$ 。

(5) $\sigma(x) = 1$, $\sigma(y) = -1$

给出下列公式在 I 和 σ 下的解释, 并指出它们的真值。

(1) $\forall x(G(x, y) \rightarrow \exists y F(x, y))$ 。

(2) $\forall y(F(f(x, y), a) \rightarrow \forall x G(x, y))$ 。

4. 判断下列公式的类型:

(1) $F(x) \rightarrow \forall x F(x)$ 。

(2) $\forall x(F(x) \rightarrow G(x)) \rightarrow (\forall x F(x) \rightarrow \forall x G(x))$ 。

5. 利用定义证明 $(\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)) \leftrightarrow (\forall x (P(x) \wedge Q(x)))$ 是永真式, 并给出一个解释说明当 $\wedge$ 换成 $\vee$ 上式就不是永真式了。